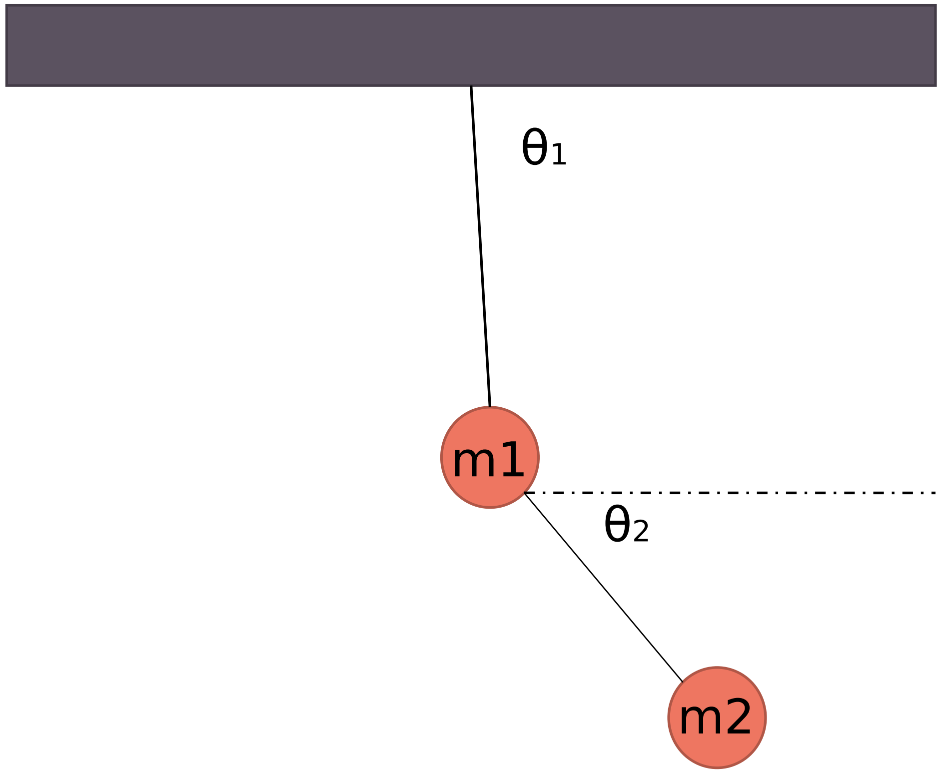
Péndulos acoplados con resortes

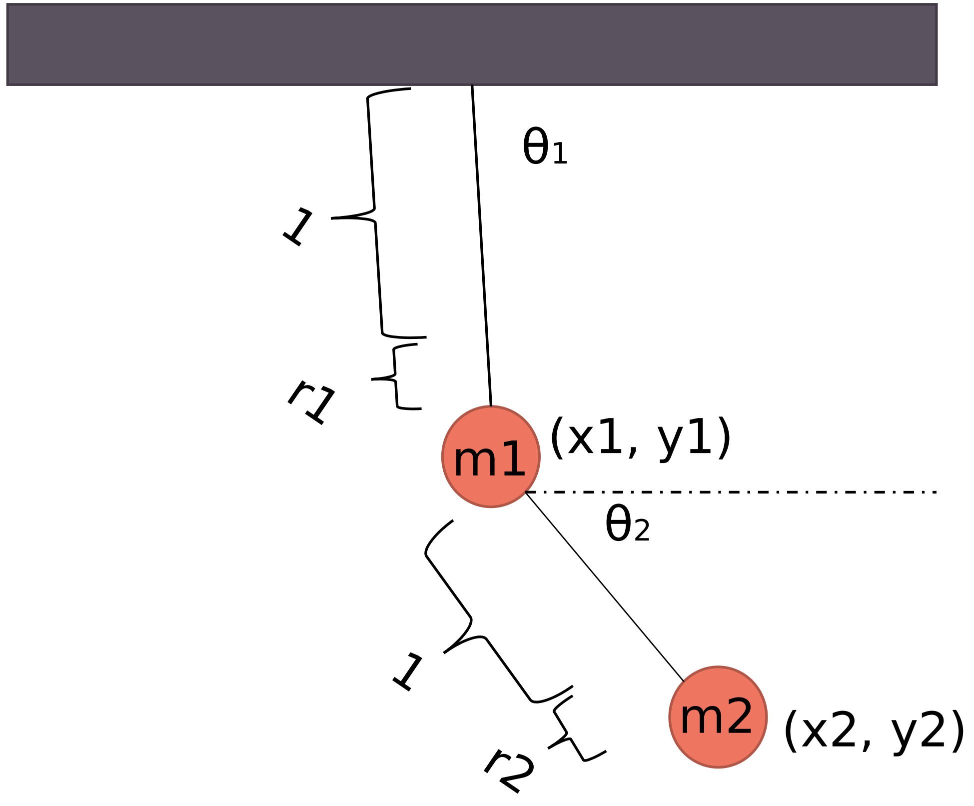
Sánchez García Fabricio Alejandro

Vamos a partir del siguiente sistema: Consiste en dos péndulos de masa m, los cuales están conectados mediante resortes de constante k.



Sean r1 y r2 las longitudes que se estiran los resortes. Sean l1 y l2, las longitudes de los resortes en su estado “natural”.

Definimos a l1=l2=1. Así podemos establecer las posiciones de las respectivas masas.



Las coordenadas de cada péndulo quedan de la siguiente forma:

$$x_1 = -(1 + r_1)cos(\theta_1)$$

$$y_1 = -(1 + r_1)sen(\theta_1)$$

$$x_2 = x_1 + (1 + r_2)cos(\theta_2)$$

$$y_2 = y_1 - (1 + r_2)sen(\theta_2)$$

Vamos a definir nuestras variables que estarán en juego. Es decir:

- El tiempo t
- La masa de los péndulos m que asumiremos es la misma para ambos
- La aceleración de la gravedad g
- Las constantes k de los resortes, que también asumiremos serán las mismas

Claro, los ángulos y las longitudes r serán funciones del tiempo.
Y definimos a sus primeras y segundas derivadas.

Ahora sí, vamos a pintar nuestro lagrangiano

- $L = T - V$

La energia cinética del sistema es

- T = $\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

La energía potencial del sistema es

- V = $\frac{1}{2}kr_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}kr_2^2 + mgy_2$

Si escribimos a mano el lagrangiano a mano, éste de entrada luce complicado. Nuestro código es testigo de la longitud del lagrangiano:

$$
\begin{aligned}
&-gm\left(\left(-\mathrm{r}_1(t)-1\right)\sin\left(\theta_1(t)\right)-\left(\mathrm{r}_2(t)+1\right)\sin\left(\theta_2(t)\right)\right)-gm\left(-\mathrm{r}_1(t)-1\right)\sin\left(\theta_1(t)\right)-0.5k\,\mathrm{r}_1^{\,2}(t)-0.5k\,\mathrm{r}_2^{\,2}(t)\\
&+0.5m\Bigg(\bigg(\left(-\mathrm{r}_1(t)-1\right)\cos\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_1(t)-\sin\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_1(t)\bigg)^2+\bigg(-\left(\mathrm{r}_1(t)+1\right)\sin\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_1(t)+\cos\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\\
&+\bigg(\left(-\mathrm{r}_1(t)-1\right)\cos\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_1(t)+\left(-\mathrm{r}_2(t)-1\right)\cos\left(\theta_2(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_2(t)-\sin\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_1(t)-\sin\left(\theta_2(t)\right)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_2(t)\bigg)^2\\
&+\bigg(-\left(\mathrm{r}_1(t)+1\right)\sin\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_1(t)-\left(\mathrm{r}_2(t)+1\right)\sin\left(\theta_2(t)\right)\frac{d}{dt}\theta_2(t)+\cos\left(\theta_1(t)\right)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_1(t)+\cos\left(\theta_2(t)\right)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_2(t)\bigg)^2\Bigg)
\end{aligned}
$$

Se ve horrible, pero nos encargaremos de resolverlo. Para esto pintamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para θ y r

$$\frac{dL}{dq} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}} = 0$$

En total tendremos cuatro ecuaciones de Lagrange, correspondientes a theta1, theta2, r1 y r2. Por supuesto que éstas lucirán todavía más complicadas, por ejemplo, mostramos en pantalla la primera ecuación de Lagrange para theta1:

```
In [32]: EL1
```

Out[32]:

$$\begin{aligned}
&m\Bigg(2.0g\,\mathrm{r}_1(t)\cos(\theta_1(t)) + 2.0g\cos(\theta_1(t)) - 2.0\,\mathrm{r}_1{}^2(t)\frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) - 1.0\,\mathrm{r}_1(t)\,\mathrm{r}_2(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2 \\
&- 1.0\,\mathrm{r}_1(t)\,\mathrm{r}_2(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) - 1.0\,\mathrm{r}_1(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2 + 1.0\,\mathrm{r}_1(t)\sin \\
&(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{r}_2(t) - 2.0\,\mathrm{r}_1(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d}{dt}\theta_2(t)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_2(t) - 1.0\,\mathrm{r}_1(t)\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) - 4.0\,\mathrm{r}_1 \\
&(t)\frac{d}{dt}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_1(t) - 4.0\,\mathrm{r}_1(t)\frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) - 1.0\,\mathrm{r}_2(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2 - 1.0\,\mathrm{r}_2(t)\cos \\
&(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) - 1.0\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2 + 1.0\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{r}_2(t) - 2.0\cos \\
&(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d}{dt}\theta_2(t)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_2(t) - 1.0\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) - 4.0\frac{d}{dt}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\mathrm{r}_1(t) - 2.0\frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t)\Bigg)
\end{aligned}$$

Si resolvemos $\frac{d^2q}{dt^2}$ entonces obtenemos dos ecuaciones por cada q. Definiendo υ_q como $\frac{dq}{dt}$ tenemos:

- $\frac{dq}{dt} = \upsilon_q$
- $\frac{d\upsilon_q}{dt}$ = Lo que sea que obtengamos

Definimos lo siguiente entonces:

- $\omega_1 \equiv \frac{d\theta_1}{dt}$
- $\omega_2 \equiv \frac{d\theta_2}{dt}$
- $\upsilon_1 \equiv \frac{dr_1}{dt}$
- $\upsilon_2 \equiv \frac{dr_2}{dt}$

Vamos a resolver las ecuaciones de Lagrange para las segundas derivadas de cada coordenada. Veamos cómo se verían la soluciones en papel...

In [18]:
```
sols[the1_dd] #Este seria nuestro d(omega1)/dt#
```

Out[18]:

Let $D = 0.00390625 m \operatorname{r}_1(t)\sin^2(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + 0.00390625 m \operatorname{r}_1(t)\cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t)) - 0.0078125 m \operatorname{r}_1(t) + 0.00390625 m \sin^2(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + 0.00390625 m \cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t)) - 0.0078125 m$

$$-\frac{0.00390625 gm \sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))\sin(\theta_2(t))}{D} + \frac{0.00390625 gm \cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))\cos(\theta_2(t))}{D} - \frac{0.0078125 gm \cos(\theta_1(t))}{D} + \frac{0.00390625 k \operatorname{r}_2(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t))}{D} - \frac{0.0078125 m \sin^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d}{dt}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\operatorname{r}_1(t)}{D} - \frac{0.0078125 m \cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))\frac{d}{dt}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\operatorname{r}_1(t)}{D} + \frac{0.015625 m \frac{d}{dt}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\operatorname{r}_1(t)}{D}$$

Es una barbaridad para ponerlo en papel! Sin embargo podemos resolverlo

Creamos funciones numpy que podemos usar con métodos numéricos

Definimos el sistema de ecuaciones diferenciales, definiendo $S = (\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2, r_1, v_1, r_2, v_2)$

En donde dijimos que tenemos 8 variables y 8 ecuaciones acopladas.

S es nuestro vector. Para resolver esto en Python tenemos que escribir una función que tome S y regrese dS/dt. En el código el sistema de 8 ecuaciones:

```
def dSdt(S, t):
    the1, w1, the2, w2, r1, v1, r2, v2 = S
    return[
        dthe1dt_f(w1), #dthe1dt es w1#
        dw1dt_f(m, k, g, the1, the2, r1, r2, w1, w2, v1, v2),
        dthe2dt_f(w2),
        dw2dt_f(m, k, g, the1, the2, r1, r2, w1, w2, v1, v2),
        dr1dt_f(v1),
        dv1dt_f(m, k, g, the1, the2, r1, r2, w1, w2, v1, v2),
        dr2dt_f(v2),
        dv2dt_f(m, k, g, the1, the2, r1, r2, w1, w2, v1, v2),
    ]
```

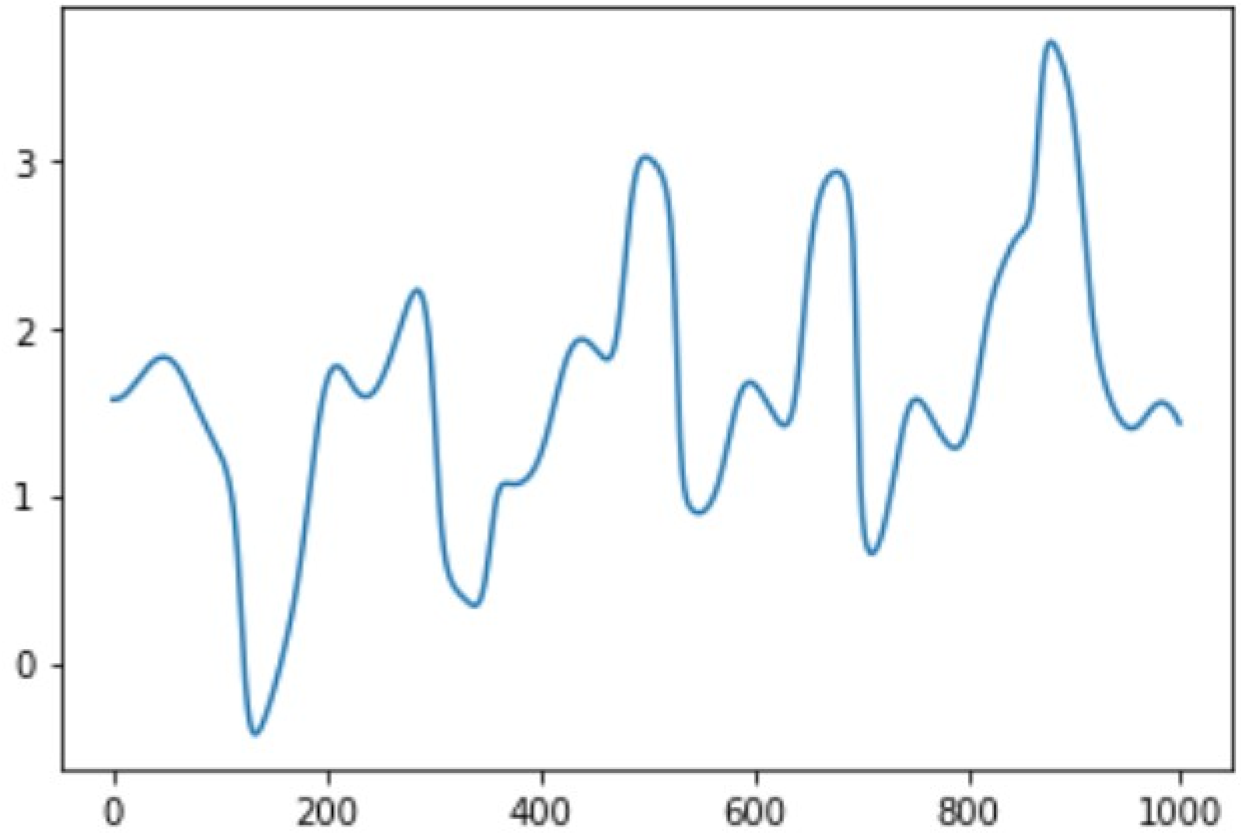
Para resolver ahora sí la EDO, definimos nuestros parámetros. En nuestro primer ejemplo, definimos lo siguiente:

```
t = np.linspace(0, 20, 1000)
g = 9.81
m = 1
k = 10
resp = odeint(dSdt, y0=[np.pi/2, 0, (3/2)*np.pi/2, 0, 0, 5, 0, 5], t=t)
```

```python
#Graficamos theta1 como función del tiempo#

plt.plot(resp.T[0])
```

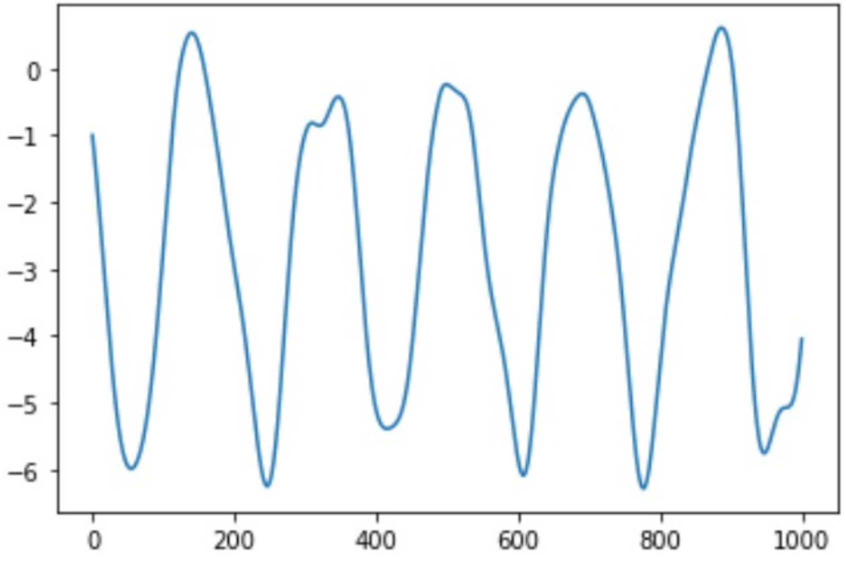
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x254bc355360>]
```

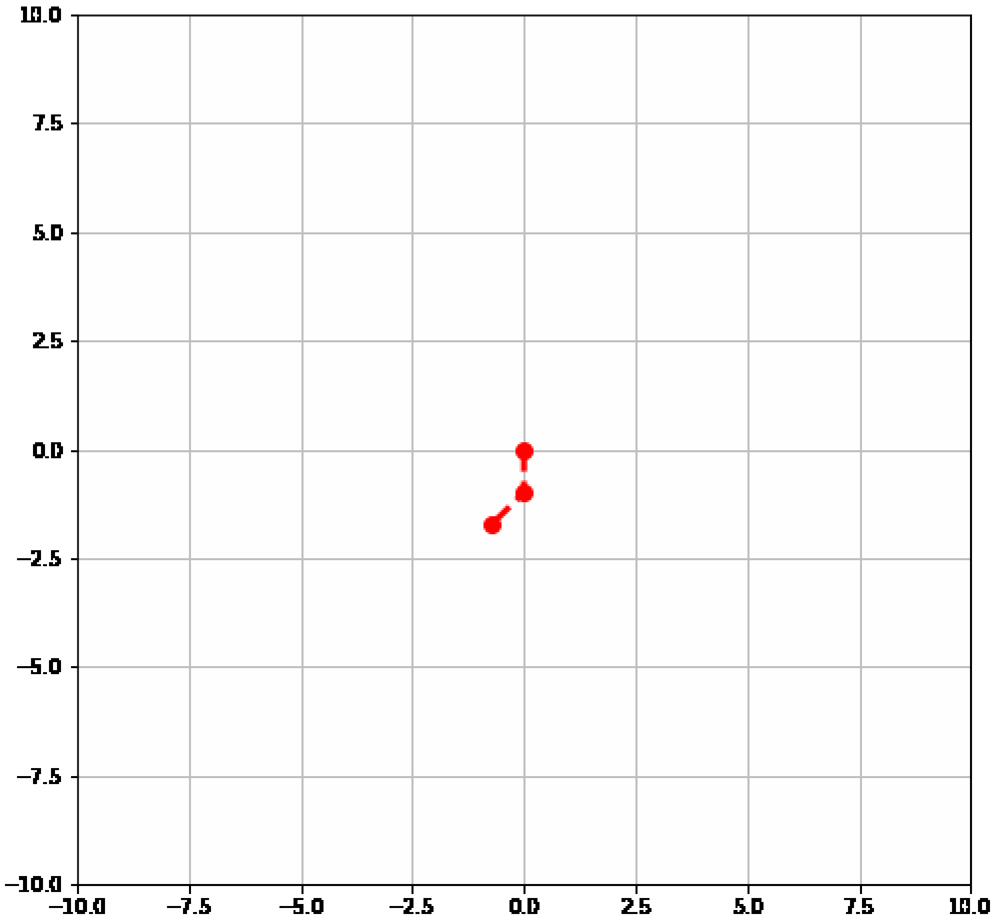


También podemos obtener las posiciones de cada x1,y1,x2,y2. Y las podemos graficar.

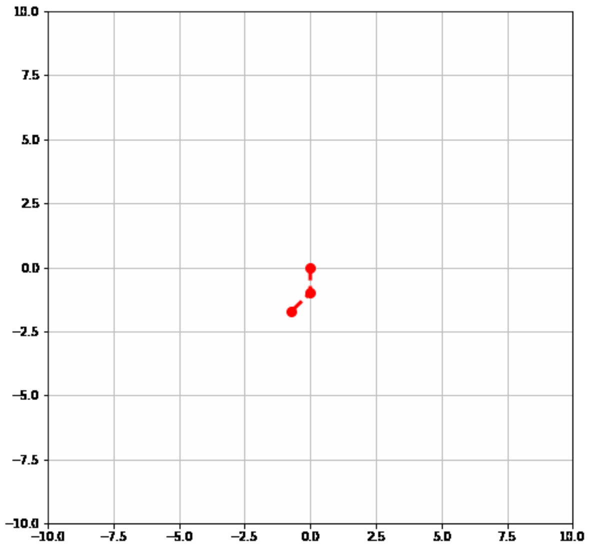
```
In [29]: plt.plot(y1)

Out[29]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x254c1afda20>]
```

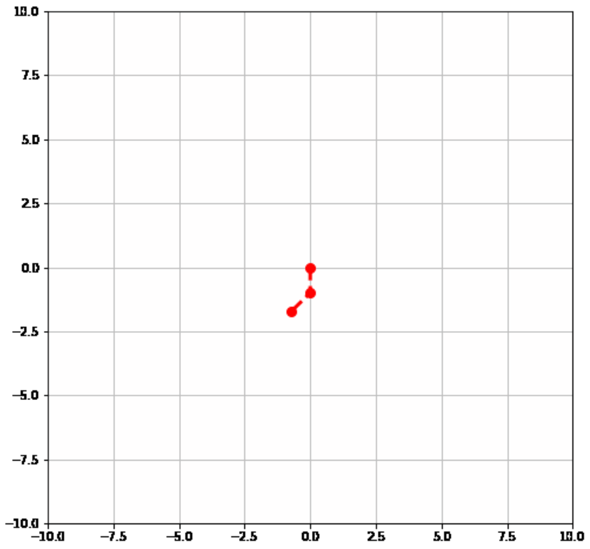




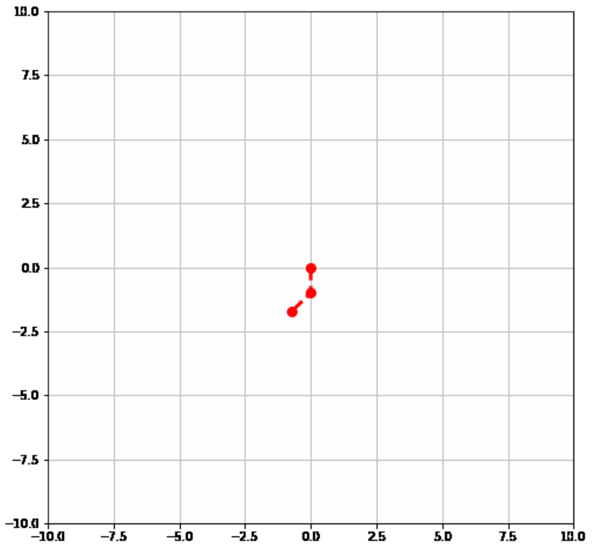
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0



m = 1
K = 10



m = 4.5
K = 6



m = 0.5
K = 4.3