



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FLUJO ALREDEDOR DE UN ALA FLEXIBLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

GONZÁLEZ LÓPEZ JUAN MANUEL

TUTOR

DR. FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SÁNCHEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
González
López
Juan Manuel
5533319063
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
312320298
2. Datos del tutor
Dr
Francisco Javier
Mandujano
Sánchez
3. Datos del sinodal 1
Dra
Catalina Elizabeth
Stern
Forgach
4. Datos del sinodal 2
Dr
Carlos
Málaga
Iguiñiz
5. Datos del sinodal 3
Dr
José Enrique
Guzmán
Vázquez
6. Datos del sinodal 4
M. en I.
David
Porta
Zepeda
7. Datos del trabajo escrito
Flujo alrededor de un ala flexible
29 p
2022

Agradecimientos

En este largo camino que he recorrido no he estado solo, por lo que es mi deber agradecer a todos los que han caminado a mi lado:

Quisiera comenzar con mi familia, ya que su apoyo incondicional me seguía motivando día a día. De cada uno de ustedes aprendí diversas cosas, todas valiosas como el amor, el sentimiento de unidad y lo que es un hogar; gracias por ser el pilar de mi vida.

A mis padres, personas que sin saberlo me han demostrado más sabiduría, esmero, fortaleza y perseverancia que ninguna otra. Son ustedes los que me dieron lo más valioso del mundo: amor, apoyo y educación, gracias por no dejarme solo, por confiar en mí..., simplemente gracias por todo.

A mi hermana, la persona más especial en mi vida, desde su llegada encontré el rumbo de mi vida y las ganas de vivir; gracias por ser el faro que me ilumina, la voz de mi conciencia, mi consejera, amiga y la persona que más he amado.

Al Borrego Atómico, negocio familiar que nos ha dado todo lo que hemos necesitado y un poco más; he conocido increíbles personas en este negocio y fue aquí donde aprendí el significado de la responsabilidad, la disciplina y la honradez.

Quisiera también agradecer a mis amigos: el ahora físico Joaquín Torres, sin él mi paso por la universidad hubiese sido tedioso; gracias por nunca dudar de mí, por todas las tardes de pláticas y juegos, por los consejos y sobre todo por ser el mejor escuchando. A David Muñoz, mi gran compañero de laboratorio, gracias por hacer de esas tardes algo divertido y por ser también un maestro aunque no tenías la obligación. A mi eterno amigo Erick Rodríguez, quien ha sido el mejor consejero; gracias por tantos momentos de diversión, de desestrés, por saber escuchar y ofrecer

la ayuda necesaria. Alejandro Zuñiga, la persona más sabia que conozco; gracias por echarme porras, por inspirarme y enseñarme el poder y la magia del conocimiento. A mi compañera Paola Méndez, la mujer que sabe alegrarme el día con una sonrisa; gracias por dame el empujón que me hacía falta.

Gracias al Dr. Fermín Viniegra, al Dr. Felipe Mendez, al Dr. Marcos Ley Koo, a la Dra. Rosa Couvert y al Dr. Francisco Mandujano, quienes sin saberlo inculcaron en mí el amor por la ciencias y el conocimiento en general, la universidad es grande gracias a ustedes. Gracias a mis sinodales por sus sabios comentarios y consejos, los cuales ayudaron a mejorar este trabajo.

Por último pero no menos importante quiero agradecer al apoyo parcial del proyecto PAPIME con número PE111020, el cual fue clave para la finalización de este escrito.

Índice general

Agradecimientos	II
1. Introducción	3
2. Planteamiento del Problema	6
2.1. Desarrollo del Perfil	7
2.2. Velocidad de la Superficie	11
2.3. Esquema Numérico	13
2.4. Procedimiento	15
3. Resultados	18
4. Conclusiones	26

Glosario

B : amplitud de oscilación de la cola del perfil

A : amplitud de oscilación del cuerpo del perfil

w : ancho máximo del perfil

h : comba de la línea media del perfil

X y Y : coordenadas adimensionales

ρ : densidad del fluido

$\langle C_D \rangle_{RMS}$: desviación cuadrática media de la fuerza de arrastre

$\langle C_L \rangle_{RMS}$: desviación cuadrática media de la fuerza de sustentación

ω : frecuencia de movimiento del perfil

C_D : fuerza de arrastre

$\langle C_D \rangle$: fuerza de arrastre promedio

C_L : fuerza de sustentación

$\langle C_L \rangle$: fuerza de sustentación promedio

l : largo del perfil

Re : número de Reynolds

St : número de Strouhal

p : presión del fluido

W : razón de aspecto del perfil

L : razón de deformación del perfil

t : tiempo

\mathbf{v} : velocidad del fluido

ν : viscosidad del fluido

Resumen

En el presente trabajo se estudia el flujo alrededor de diferentes geometrías flexibles basadas en el perfil asimétrico de Joukowsky. Las geometrías están inmersas en un flujo incompresible en régimen estacionario.

Para analizar el flujo se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible con condiciones a la frontera. Estas ecuaciones son resueltas de manera numérica utilizando el método de Boltzmann en redes.

Se estudian los diferentes parámetros geométricos de los perfiles propuestos tales como su longitud, ancho, amplitud de oscilación, entre otros, para inferir la forma en que éstos modifican el flujo y las fuerzas de arrastre y sustentación que sienten dichos perfiles. El problema está caracterizado por los números adimensionales de Reynolds Re y Strouhal St . Las estelas producidas también son analizadas de manera cualitativa para poder caracterizarlas y clasificarlas.

Se encontró una relación directa entre las fuerzas de arrastre y sustentación con la magnitud de deformación de las diferentes geometrías así como con sus parámetros geométricos, logrando caracterizar el flujo en términos de un solo parámetro adimensional.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de diferentes perfiles alares rígidos puede ser rastreado desde las contribuciones hechas por Leonardo da Vinci [1], pasando por Isaac Newton y Daniel Bernoulli [2]. Pero fue hasta el año 1799 cuando el ingeniero Sir George Cayley (1773-1857) estudió de manera formal diferentes perfiles planos y curvados e identificó fuerzas que actúan sobre estos al ser enfrentados a un flujo, las cuales son el arrastre, peso y sustentación. Además de llegar a la deducción de que la sustentación, una fuerza que actuaba perpendicular a la dirección del flujo sobre estos perfiles, es resultado de una diferencia de velocidades entre la parte superior e inferior de los mismos. Esto marcó un punto de partida en el estudio sistemático y formal de diferentes perfiles, dando un especial interés a las fuerzas involucradas. En 1884 el ingeniero Francis Herbert Wenham (1824-1908) dio un paso más allá al estudiar los parámetros geométricos de diversos perfiles como lo son su ancho, largo y comba buscando un perfil que maximizara la sustentación con el objetivo de hacerlos posibles de fabricar.

Buscando dotar de un tratamiento matemático el estudio de diferentes geometrías la National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) comenzó a desarrollar diferentes perfiles alares a partir de 1915; estos perfiles serán conocidos como perfiles NACA. Este enfoque se vio reflejado en un control de los diversos parámetros geométricos que comenzaron a ser ampliamente estudiados como lo son el ancho, la curvatura, la razón de aspecto entre largo y ancho, la posición del ancho máximo y las asimetrías, parámetros que resultaron esenciales en el entendimiento de las fuerzas

alrededor de estas. De este modo en 1933 se publicó el artículo "The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel" [3], donde se presenta un reporte experimental de diferentes perfiles NACA conocidos como la serie de 4 dígitos (los cuales están relacionados con su curvatura, el grosor máximo del ala y la posición de este). Este reporte expone de forma metódica la importancia de los parámetros geométricos en el análisis de las fuerzas alrededor de los perfiles estudiados.

Muchos perfiles fueron probados en un entorno enfocado al nado, estudiándolos como perfiles sumergidos en un medio viscoso y enfrentadas a diversos flujos, buscando entender qué provocaba que los organismos capaces de desplazarse por el agua modificaban las fuerzas ejercidas sobre ellos. El que los perfiles fuesen rígidos no era apegado a lo que la naturaleza evidenciaba, así que se comenzó a dotar de flexibilidad a los perfiles. Min Je Kim y Jae Hwa Lee [4] compararon las fuerzas que experimentaba un perfil plano rígido con las que experimentaba este mismo perfil dejándolo fijo solo de un extremo, permitiendo que este aletee, mostrando la importancia de la flexibilidad de un ala en la disminución del arrastre; Zhe Fang, et. al. [5] también mostraron que el perfil NACA0012 flexible reducía el arrastre notablemente en comparación con el perfil con aleteo rígido; Lian Yongsheng y Wei Shyy [6] hicieron lo propio pero enfocado en explicar cómo los parámetros geométricos de un perfil flexible vuelven turbulento un flujo; J-M Miao y M-H Ho [7] no dejaron al ala libre sino que impusieron un movimiento periódico en esta y encontraron como las transiciones arrastre-propulsión están ligadas a sus frecuencias de movimiento; Anderson, et. al. [8] estudiaron de forma experimental la formación y desprendimiento de vórtices de un perfil, logrando explicar la transición arrastre-propulsión en términos de la transición de una calle tipo von Kármán a una von Kármán invertida, siendo la intensidad de esta transición proporcional a la frecuencia y amplitud de oscilación del perfil.

En este trabajo se estudiará un perfil basado en los desarrollados por el ingeniero ruso Nikolái Yegórovich Zhukovski (1847-1921). Estos perfiles fueron convenientes para las soluciones de flujo potencial ya que surgen de una transformada conforme del círculo y gracias a ello se tuvo un ejemplo más de soluciones analíticas de un

flujo. Sin embargo, después de ello pasaron bastante desapercibidas. Ravi Jain y Usman Mohammad hicieron una comparación de las fuerzas hidrodinámicas entre uno de estos y el NACA0012 [9], pero los resultados fueron bastante similares, por lo que se entiende el poco éxito de esta geometría. Pero Jabir Ubaid Parakkal et al. [10] mostraron que este perfil podría ser más eficiente que otros en áreas no tan exploradas. En este artículo se muestra que en una turbina eólica de eje vertical la selección de un perfil de Joukowsky mejora la eficiencia de extracción de energía en comparación con los perfiles clásicos usados para estas turbinas (NACA0012 y NACA4312), evidenciando la viabilidad de este perfil que supera a otros en temas tan vigentes e importantes como lo son las energías renovables.

El perfil usado en este trabajo es una modificación de los perfiles de Joukowsky al cual se le impuso un movimiento periódico forzado con el cual se busca recrear una geometría con un movimiento orgánico. Se estudiarán sus parámetros geométricos, así como la amplitud y frecuencia de este movimiento impuesto para estudiar su relación con las fuerzas de arrastre y sustentación que experimenta el perfil, así como con la forma de las estelas que estas forman para su clasificación.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

El problema a resolver en este trabajo es estudiar el flujo libre bidimensional e incompresible de un fluido Newtoniano alrededor de un perfil flexible, el cual está basado en los perfiles simétrico y asimétrico de Joukowski. El fluido tiene una velocidad inicial constante lejos del ala, paralela al eje de esta. Del mismo modo la presión lejos del ala es constante. El ala se encuentra inmersa en un espacio infinito bidimensional. Para encontrar la solución se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{v} , p , ρ y ν son el campo de velocidades, de presiones, la densidad y viscosidad cinemática del fluido, respectivamente.

Las condiciones de frontera del problemas son

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} \rightarrow \infty, t) = V \hat{e}_x, \quad (2.3)$$

$$p(\mathbf{r} \rightarrow \infty, t) = p_0, \quad (2.4)$$

siendo V y p_0 la velocidad y la presión del fluido lejos del ala, respectivamente. La última condición de frontera es la condición de no deslizamiento,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_s, t) = \mathbf{u}_s, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{r}_s es un vector que va del origen de coordenadas a algún punto en la superficie del ala y \mathbf{u}_s su velocidad; esto se ve esquematizado en la Figura 2.1.

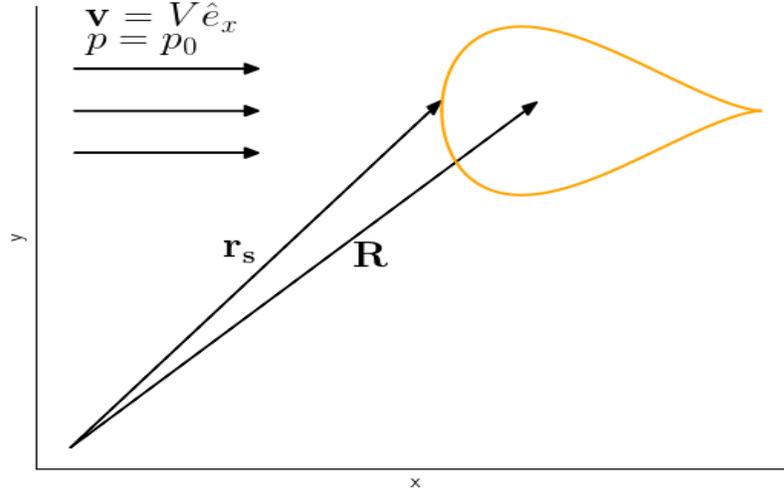


Figura 2.1: Esquema del problema, siendo \mathbf{v} y p el campo de velocidades y presiones, V y p_0 la velocidad y presión del fluido constante lejos del perfil y \mathbf{r}_s y \mathbf{R} el radio vector que va del origen a la superficie del perfil y el radio vector que va del origen a su centro de masa, respectivamente.

2.1. Desarrollo del Perfil

El ala que se estudió fue una modificación del ala asimétrica de Joukowski, descrita por la relación

$$y = \pm 0.385w \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \sqrt{1 - 4\frac{x^2}{l^2}} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^4}{64h^2} - x^2} - \frac{l^2}{8h},$$

donde l es el largo del ala, w su ancho máximo y h la comba de la línea media. Dichos parámetros están esquematizados en la Figura 2.2. El signo positivo recrea la mitad superior del perfil mientras que el signo negativo recrea la mitad inferior. El parámetro h mide el radio de curvatura de la línea media, siendo la deformación del

perfil mayor a medida que este parámetro disminuye.

Esta ecuación puede ser adimensionalizada al escalarla por el largo l , resultando en la relación

$$Y = \pm 0.385W(1 - 2X)\sqrt{1 - 4X^2} + \sqrt{0.25 + L^2 - X^2} - L, \quad (2.6)$$

donde $X = \frac{x}{l}$ y $Y = \frac{y}{l}$ son las coordenadas adimensionales, $W = \frac{w}{l}$ la relación entre ancho y largo o razón de aspecto y $L = \frac{l}{8h}$ es la razón de deformación, una relación entre largo y magnitud de deformación.

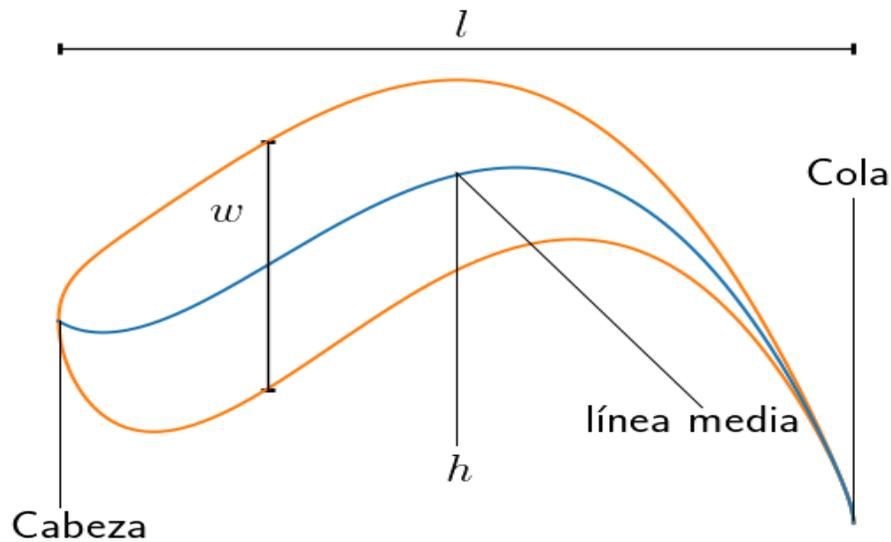


Figura 2.2: Esquematación de los parámetros del ala asimétrica de Joukowski.

Este perfil es una geometría fija de sus dos extremos, la cabeza y la cola, por lo que las modificaciones están enfocadas en dotarla de movilidad y una apariencia de perfil flexible. En primer lugar se introdujo una función periódica la cual cambiaba la curvatura del ala; esta función estará modulada por una amplitud A , por lo que este parámetro adimensional modula la deformación del cuerpo del ala. En segundo lugar se liberó la cola, con lo que solo la cabeza del ala estará fija, siendo el parámetro adimensional B el que modula la amplitud de oscilación de la cola. El movimiento

del cuerpo y la cola están desfasados $\frac{\pi}{2}$ para lograr una sensación de flexibilidad. Las modificaciones hechas llevan a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 Y = & \pm 0.385W(1 - 2X)\sqrt{1 - 4X^2} \\
 & + A \sin \omega t \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right) \sqrt{0.25 + L^2 - X^2} \sqrt{1 - 4X^2} \\
 & - B \sin \omega t \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right),
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

la cual recrea la geometría vista en la Figura 2.3, donde también se aprecia el peso de todos los parámetros. Por un lado en las Figuras 2.3 (a) y (b) se observa que el parámetro L modifica la curvatura del ala, haciendo que el ala presente una deformación menos suave a medida que L disminuye. Por otro lado en las Figuras 2.3 (b) y (d) se aprecia el peso del parámetro A , el cual va ligado directamente a la deformación del cuerpo del ala. Finalmente en las Figuras 2.3 (b) y (c) el cambio en el parámetro B indica la relación entre este parámetro y la amplitud de oscilación de la cola; esta amplitud es igual a $2Bl\sqrt{0.5 + L^2}$.

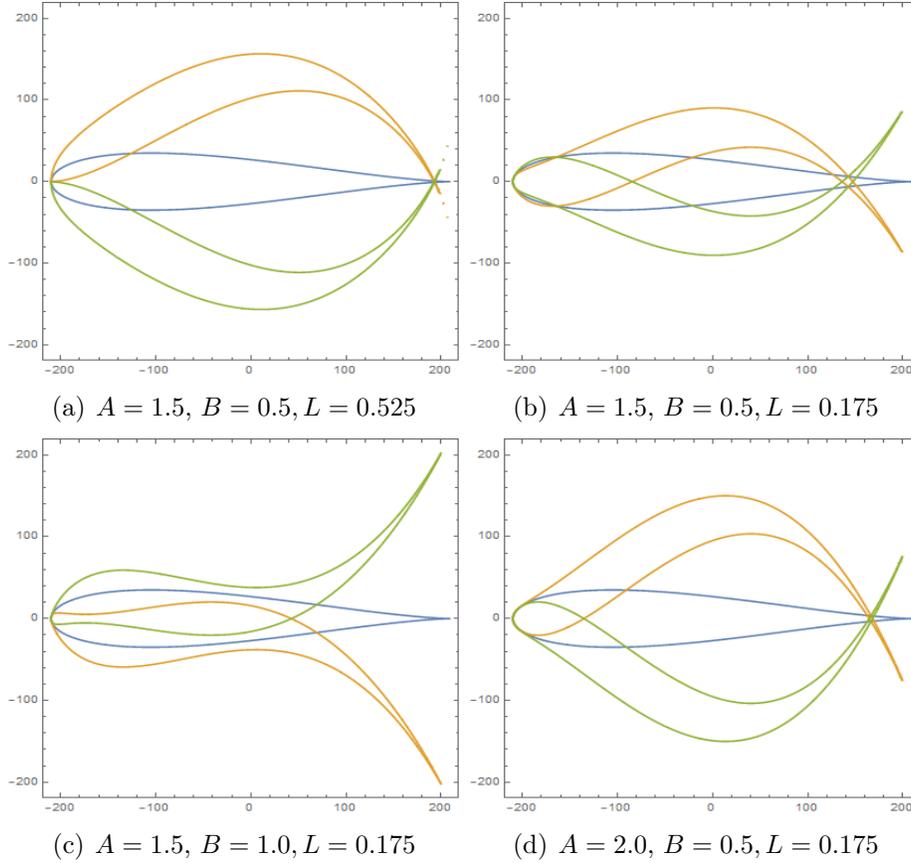


Figura 2.3: Ala asimétrica de Joukowski en diferentes momentos del tiempo, con diferentes valores de los parámetros, manteniendo fijo $W = \frac{1}{6}$. En azul se muestra el ala con $\omega t = 0$, en naranja $\omega t = \frac{\pi}{2}$ y en verde $\omega t = \frac{3\pi}{2}$.

Esta geometría conserva el área. Esto se puede demostrar al partir la relación (2.7) en una parte dependiente del tiempo y otra parte independiente del tiempo.

$$\begin{aligned}
 H(x) &= 0.385W(1 - 2X)\sqrt{1 - 4X^2} \\
 J(X, t) &= A \sin \omega t \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right) \sqrt{0.25 + L^2 - X^2} \sqrt{1 - 4X^2} \\
 &\quad - B \sin \omega t \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right), \\
 Y &= \pm H(X) + J(X, t),
 \end{aligned}$$

el signo positivo corresponde a la parte superior de la curva, mientras que el signo negativo corresponde a la parte inferior. De este modo el área I se puede calcular

como

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Y dX, \\
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (H(X) + J(X, t)) dX - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (-H(X) + J(X, t)) dX \\
 &= 2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} H(x) dX.
 \end{aligned}$$

Esta ecuación no es dependiente del tiempo, por lo que se concluye que el área se conserva.

2.2. Velocidad de la Superficie

Por la condición de no deslizamiento (2.5) es necesario conocer la velocidad de los puntos sobre la superficie del ala \mathbf{u}_s , por lo cual se debe entender a ésta como una curva implícita dependiente del tiempo, es decir:

$$\Gamma[t] = \{\mathbf{r}_s | F(\mathbf{r}_s, t) = 0\}, \quad (2.8)$$

siendo t el tiempo y \mathbf{r}_s el vector de posición del origen a un punto sobre la superficie. Por lo tanto es necesario tener una expresión analítica de la superficie como función de las coordenadas y el tiempo.

Al estudiar un caso bidimensional se entenderá la función como $F(x, y, t) = 0$. Derivando por regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dF}{dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad (2.9)$$

La ecuación anterior se puede reescribir en términos del gradiente de F teniendo algunas consideraciones. Por un lado, se escribe el gradiente de F en términos de una matriz de (1×2) siendo $(\nabla F)^T = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$, igual que al vector $\mathbf{r}_s^T = (x, y)$, lo cual

al hacer uso de la notación $\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt}$ la ecuación (2.9) se reescribe como

$$-\dot{F} = \nabla F^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_s. \quad (2.10)$$

Las componentes de la velocidad son $\mathbf{u}_s = (u_x, u_y) = (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{\mathbf{r}}_s$, por lo que partiendo de la Ecuación (2.10) y aplicando el formalismo de la pseudo-inversa de Moore [11] para vectores se obtiene la ecuación:

$$\dot{\mathbf{r}}_s = -\dot{F} \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}, \quad (2.11)$$

La componente tangencial puede tomar cualquier valor dada la misma deformación, y dado que el movimiento interno del perfil y las rotaciones del mismo no modifican su forma, esta componente fue fijada en cero.

De la ecuación (2.11) se extraen las 2 componentes normales de la velocidad:

$$\dot{x} = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\|\nabla F\|} \quad \dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\|\nabla F\|}. \quad (2.12)$$

En el caso específico de esta geometría se define $\Gamma[t] = \{(X, Y) | F(X, Y, t) = 0\}$ como

$$\begin{aligned} F(X, Y, t) &= \pm 0.385W(1 - 2X)\sqrt{1 - 4X^2} + \sin \omega t (Af(X) - Bg(X)) - Y, \\ f(X) &= \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right) \sqrt{0.25 + L^2 - X^2} \sqrt{1 - 4X^2}, \\ g(X) &= \left(\sqrt{0.25 + L^2 + \frac{X}{2}} - L \right). \end{aligned}$$

Es necesario calcular $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial X}$, $\frac{\partial F}{\partial Y}$ y $\frac{\partial F}{\partial t} = \omega \cos \omega t (Af(X) - Bg(X))$.

Dada la cantidad de términos se hace necesario partir las derivadas; por un lado

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\partial}{\partial X} (\pm 0.385W(1-2X)\sqrt{1-4X^2}) = \pm \frac{0.77W(8X^2-2X-1)}{\sqrt{1-4X^2}}, \\
 \frac{\partial f(X)}{\partial X} &= b+c+d \\
 b &= \frac{\sqrt{0.25+L^2-X^2}\sqrt{1-4X^2}}{4\sqrt{0.25+L^2+\frac{X}{2}}}, \\
 c &= \frac{-X(\sqrt{0.25+L^2+\frac{X}{2}}-L)\sqrt{1-4X^2}}{\sqrt{0.25+L^2-X^2}}, \\
 d &= \frac{-4X(\sqrt{0.25+L^2+\frac{X}{2}}-L)\sqrt{0.25+L^2-X^2}}{\sqrt{1-4X^2}}, \\
 e &= \frac{\partial g(X)}{\partial X} = \frac{1}{4\sqrt{0.25+L^2+\frac{X}{2}}}, \\
 \frac{\partial F(X,Y,t)}{\partial Y} &= -1, \\
 \frac{\partial F}{\partial t} &= \omega \cos \omega t (Af(X) - Bg(X)).
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 u_x = \dot{X} &= -\omega \cos \omega t (Af(X) + B(g(X))) \frac{a + \sin \omega t (A(b+c+d) - Be)}{(a + \sin \omega t (A(b+c+d) - Be))^2 + 1}, \\
 u_y = \dot{Y} &= \omega \cos \omega t (Af(X) + B(g(X))) \frac{1}{(a + \sin \omega t (A(b+c+d) - Be))^2 + 1}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3. Esquema Numérico

Para resolver las ecuaciones (2.1 y 2.2) se implementó el método de Boltzmann en redes para un espacio bidimensional considerando la interacción con nueve vecinos (esquema D2Q9) [12] con la aproximación sobre el término de colisión hecha por Bhatnagar, Groos y Krook (modelo BGK) [13]; la principal limitación de usar el modelo BGK es que se usa un único tiempo de relajación, lo que implica que se pueden sufrir problemas de estabilidad si este tiempo es muy grande; de igual modo la

transferencia de calor y la transferencia de momento se realizan a la misma velocidad, lo que fuerza al número de Prandtl a ser igual a la unidad; dicho de otro modo, este modelo es apropiado solo para flujos isotérmicos. En este método el espacio se discretiza usando una red cuadrada, mientras que los pasos de tiempo discretizados son fijados a la unidad.

Para la implementación de este método se introduce la función discreta $f_k(\mathbf{r}, t)$ que indica la probabilidad de encontrar una partícula en la posición \mathbf{r} al tiempo t con velocidad en la dirección \mathbf{e}_k , la cual evoluciona en el tiempo y el espacio de acuerdo a la ecuación

$$f_k(\mathbf{r} + \mathbf{e}_k, t + 1) = f_k(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\lambda}(f_k(\mathbf{r}, t) - f_k^{eq}(\mathbf{r}, t)). \quad (2.14)$$

donde la parte derecha de la ecuación representa el comportamiento de partículas relajándose a un estado de equilibrio local después de un tiempo λ debido a colisiones binarias, siendo λ el tiempo de relajación el cual que está relacionado con la viscosidad cinemática vía $\lambda = 3\nu + \frac{1}{2}$, \mathbf{e}_k son las velocidades microscópicas, ρ es la densidad del fluido y f^{eq} es la función de distribución discreta de Maxwell para el equilibrio térmico dada por

$$f_k^{eq}(\mathbf{r}, t) = w_k \rho (1 + 3(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{u}) + 9(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{u})^2 - 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})), \quad (2.15)$$

donde $k \in [0, 1, \dots, 8]$, $w_0 = 4/9$, $w_k = 1/9$ para $k = 1, 2, 3, 4$ y $w_k = 1/36$ para $k = 5, 6, 7, 8$. Las velocidades microscópicas están dadas por

$$\mathbf{e}_k = \begin{cases} (0, 0) & k = 0 \\ (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) & k = 1, 2, 3, 4 \\ (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) & k = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (2.16)$$

Haciendo uso de este método es posible calcular la densidad y el campo de velocidades macroscópicas gracias a la relación

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^8 f_k(\mathbf{x}, t),$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_k f_k(\mathbf{x}, t).$$

Las ecuaciones (2.1) pueden ser deducidas partiendo de las ecuaciones (2.14) para números de Mach pequeños usando el procedimiento desarrollado por Chapman y Enskog [14, 15], por lo que resolver este método numérico es equivalente a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.

El algoritmo descrito en la ecuación (2.14) da un método explícito para los nodos con vecinos dentro del dominio del fluido. Para los nodos adyacentes a las paredes las funciones de distribución están dadas por las condiciones de frontera; se impusieron las condiciones de frontera para paredes rígidas curvas dadas por Zhaoli Guo et al. [16]. Para los nodos adyacentes a la geometría impuesta las funciones de distribución se separaron en una parte en equilibrio (aproximándolas con funciones ficticias que refuerzan las condiciones de frontera) y una parte fuera de equilibrio. Además, la condición de no deslizamiento en la frontera del perfil se recrea con la condición de rebote o half way bounce-back [17]. Las fuerzas de arrastre y sustentación se determinaron implementando el método de intercambio de momento propuesto por Renwei Mei et al. [18].

2.4. Procedimiento

Se debió recrear un sistema infinito bidimensional, por lo que su tamaño y la posición del ala dentro este fueron tales que se disminuyeron efectos de borde como interacción de los vórtices desprendidos con las paredes; para esto el tamaño del sistema se estableció en 30 veces el tamaño del ala, colocando a esta a la mitad del canal. El sistema se dejó evolucionar la cantidad de tiempo necesaria para llegar a notar una estabilidad en el flujo; es decir, hasta que la estela que formaba el perfil se extendiera por todo el canal y mostrara un comportamiento periódico.

Los parámetros característicos de este problema son el ancho del ala w , su frecuencia del movimiento ω , la densidad del fluido ρ_f y ν su viscosidad así como la velocidad del fluido lejos del ala o velocidad de entrada V . Con estos parámetros el

sistema quedará escalado y determinado por los números adimensionales de Reynolds ($Re = \frac{Vw}{\nu}$) y de Strouhal ($St = \frac{2Bl(\sqrt{0.5+L^2}-L\omega)}{2\pi V}$). Así mismo la fuerza que siente el ala debida al flujo se puede escalar con el parámetro $\frac{\rho_f V^2 w}{2}$, fuerza cuyas componentes horizontal (\hat{e}_x) y vertical (\hat{e}_y) son el coeficiente de arrastre C_D y el coeficiente de sustentación, C_L . El tiempo t también será adimensionalizado en términos de la frecuencia de forzamiento ω .

La geometría que recrea la ecuación (2.7) consta de dos parámetros geométricos (razón de aspecto W y razón de deformación L), dos parámetros que pesan las deformaciones parámetros de deformación (A y B), así como los números de Reynolds y Strouhal.

El número de Reynolds Re se fijó en 50, un valor lo suficientemente bajo para que se reflejen los efectos del movimiento del ala en la vorticidad; es decir, si el ala simétrica estática es enfrentada a un flujo con $Re = 50$ este no formará vórtices; este mismo perfil comienza a desprender vórtices con un $Re > 100$. El número de Strouhal se fijó en 0.15 que de acuerdo a Taylor [19] es un valor al cual las geometrías oscilantes comienzan a desprender vórtices de manera constante. La razón de aspecto se fijó en $W = 1/6$, esto para tener un punto de comparación con las investigaciones realizadas por Mandujano y Málaga [20]. Finalmente se realizaron simulaciones de control donde se establecieron los intervalos de valores para los parámetros A , B y L . Los valores mínimos fueron aquellos que dieron al ala el movimiento suficiente para perturbar el flujo de manera visible y los máximos aquellos a partir de los cuales el programa sale de su límite de estabilidad. De este modo se determinó que $A \in [0.5, 3]$, $B \in [0.4, 1.6]$ y $L \in [0.175, 0.525]$. Las alas que presentaron comportamientos más diversos se dieron con $L = 0.2625$, por lo que se fijó este parámetro.

Los experimentos numéricos consistieron en dejar fijos los parámetro Re , St , W y L , variando los parámetros A y B , analizando en cada caso los coeficientes de arrastre C_D y sustentación C_L como función del tiempo y de los parámetros A y B , así como sus promedios ($\langle C_D \rangle$, $\langle C_L \rangle$) y desviaciones cuadráticas medias ($\langle C_D \rangle_{RMS}$, $\langle C_L \rangle_{RMS}$). Las estelas formadas por estos perfiles también fueron estudiadas para su clasificación, buscando una relación entre los parámetros de deformación y la forma

que esta adopta.

Capítulo 3

Resultados

Las fuerzas hidrodinámicas experimentadas por las geometrías simuladas y las estelas que éstas formaron fueron estudiadas como función del tiempo y de sus parámetros geométricos para caracterizar su comportamiento.

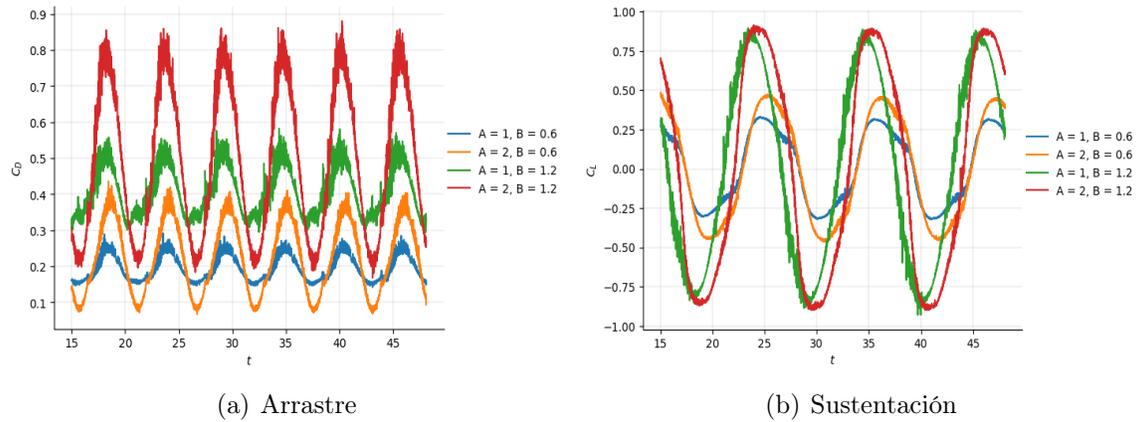


Figura 3.1: Gráficas de las fuerzas como función del tiempo para diferentes valores de A y B , manteniendo $St = 0.15$ y $Re = 50$.

Como se aprecia en la Figura 3.1 (a), el coeficiente de arrastre como función del tiempo tiene un comportamiento sinusoidal independientemente de los coeficientes de deformación, con una frecuencia igual a la frecuencia del forzamiento; en la Figura 3.1 (b) se observa que el coeficiente de sustentación también tiene un comportamiento sinusoidal que oscila con una frecuencia $\omega/2$ (resultados que concuerdan con los reportados por Fang et. al. [5]). Las amplitudes de oscilación de ambas fuerzas son di-

rectamente proporcionales a los coeficientes A y B ; para la sustentación es la amplitud de oscilación de la cola la que aumenta de manera más pronunciada las amplitudes de ambas fuerzas.

Las estelas fueron clasificadas siguiendo la nomenclatura de Williamson y Roshko [21], en la cual se contabilizan la cantidad de vórtices desprendidos por periodo si estos lo hacen individualmente S o en pares P . Si se desprenden n vórtices de manera individual y m en pares la estela se nombrará $nS + mP$; para el caso de una estela $1P$ esta recibe el nombre de calle de von Kármán o wKw. En la Figura 3.2 se observan diferentes patrones con su respectiva clasificación.

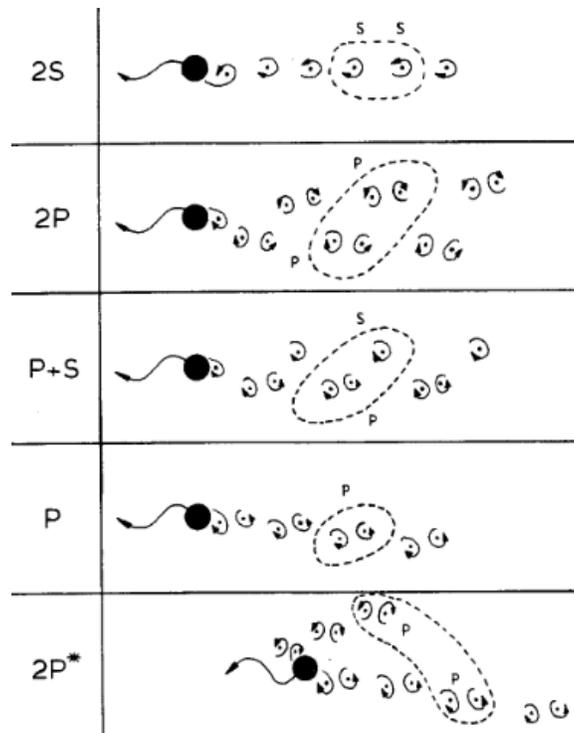


Figura 3.2: Clasificación de las estelas formadas detrás de un cilindro oscilante. Imagen tomada del artículo "Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder" [21].

Al clasificar los perfiles en función de las estelas que estos forman se observa una relación entre los parámetros A y B , ya que se existen regiones en las cuales los perfiles forman el mismo patrón en sus estelas. Si $A/B = 7.5$ la estela detrás del perfil es una $1P + 2S$ (Figura 3.3 (c)); para $3.75 \leq A/B \leq 5$ es una $2P$ (Figuras 3.3 (b) y (f)); si $2.5 \leq A/B \leq 3$ es una $4S$ (Figuras 3.3 (a), (e) y (i)); mientras que para

una estructura tipo vKw (estela 1P), $2.5 \leq A/B$ (Figuras 3.3 (d), (g), (h), (j), (k), (l), (m), (n), (ñ), (o), (p) y (q)).

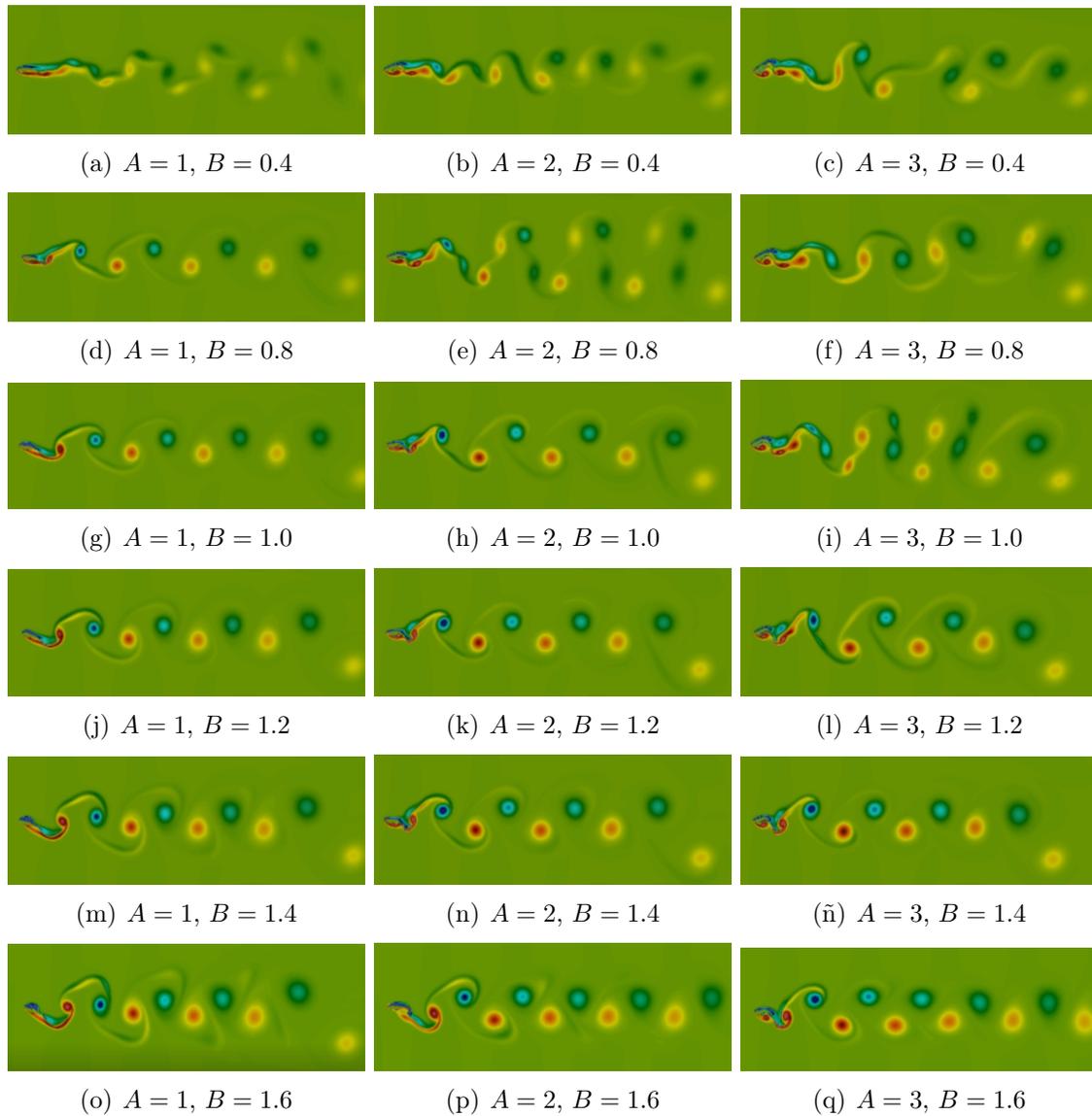


Figura 3.3: Estelas formadas por alas con parámetros $L = 0.2625$ y $W = \frac{1}{6}$ enfrentadas a un flujo con $Re = 50$ y $St = 0.15$. En rojo se muestran los vórtices positivos y en azul los negativos, siendo la intensidad de los colores proporcional a la intensidad de los vórtices.

Los perfiles que forman una vKw tienden a reducir el ancho de su estela y a aumentar la intensidad de los vórtices desprendidos a medida que el parámetro A/B aumenta. Las Figuras 3.3 (p) y (q) muestran vKw con vórtices intensos y el menor ancho comparado con las demás estelas. Esto indica que los perfiles con las mayores

amplitudes de oscilación de sus colas y mayor deformación de sus cuerpos son los que forman las vKw más estrechas, largas e intensas. Esta clasificación de las estelas en términos de la relación A/B permite analizar las fuerzas en función de este mismo parámetro.

Dado que los coeficientes de las fuerzas como función del tiempo tiene un comportamiento sinusoidal su desviación cuadrática media (RMS) es proporcional a su amplitud de oscilación.

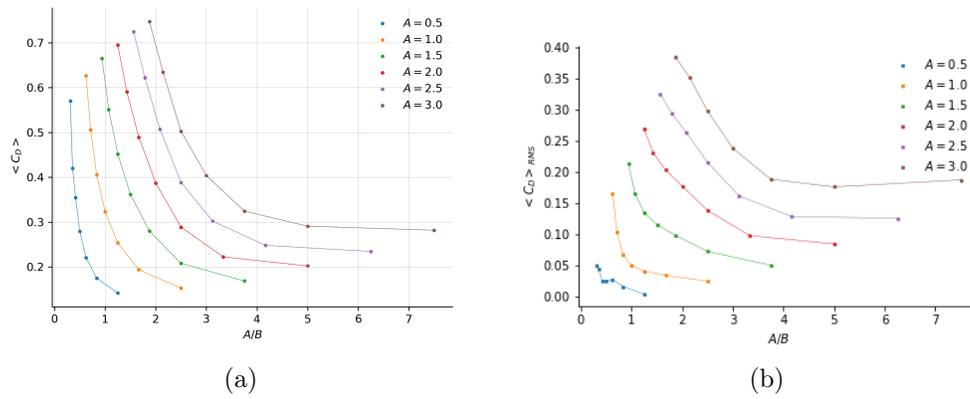


Figura 3.4: Arrastre promedio y desviación cuadrática media contra el parámetro A/B para diferentes valores de A .

A medida que el perfil aumenta la amplitud de oscilación de la cola, manteniendo fija la deformación de su cuerpo, el arrastre promedio que esta experimenta decrece lo que indica que es el movimiento de la cola el que tiene una mayor influencia en el arrastre. Este comportamiento señala que son las geometrías que forman calles de von Kármán (como se aprecia en las Figuras 3.3) las que sienten un mayor arrastre promedio (ya que $A/B \leq 2.5$), mientras que las geometrías que forman estelas $1P+2S$ son las que minimizan el arrastre promedio pues $A/B \geq 7$.

Este comportamiento decreciente del arrastre como función de algún parámetro geométrico concuerda con lo reportado por He, et. al. [22] para un perfil rígido que aletea. Del mismo modo Fang et. al. [5] reportan un comportamiento similar al visto en la Figura 3.4 para un perfil NACA0012 flexible como función de un parámetro que modula su deformación.

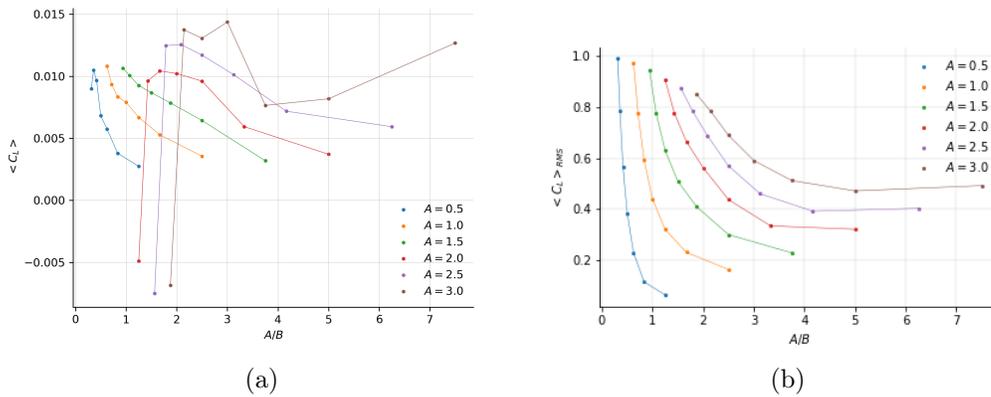


Figura 3.5: Sustentación promedio y desviación cuadrática media contra el parámetro A/B para diferentes valores de A .

La sustentación promedio que experimenta este perfil como función de A/B es decreciente. Del mismo modo que con el arrastre promedio, son las geometrías que forman calles de von Kármán las que maximizan tanto la sustentación promedio y su amplitud de oscilación y aquellas que forman estelas $1P + 2S$ la minimizan. La excepción a este comportamiento se encuentra para la geometría con parámetro $A = 3.0$, ya que la sustentación mínima se da cuando $B = 1.2$, siendo una geometría que forma una estela tipo vK.

La geometría parte de un perfil simétrico que se deforma la mitad del tiempo con el cuerpo hacia arriba y la cola hacia abajo y la otra mitad del tiempo en dirección contraria, siendo una deformación simétrica en el tiempo, sin embargo la sustentación promedio siempre es distinta de cero, lo que implica un rompimiento en la simetría del problema. Otro detalle es que hay geometrías que sienten una sustentación promedio negativa.

El comportamiento de la sustentación concuerda con el reportado por Fang et. al. para el perfil NACA0012 rígido que aletea; Lin, et. al. [23] también reportan comportamientos similares para el mismo perfil cuando este se encuentra cerca de una pared.

Para explorar el rompimiento en la simetría del problema y el cambio de signo en la sustentación es necesario analizar diferentes condiciones de la geometría. El

primer experimento realizado consistió en mantener los perfiles estáticos para estudiar el efecto de la deformación en la sustentación. La sustentación que siente el perfil simétrico estático es cero; sin embargo, si se simula el perfil estático en su posición de máxima deformación la sustentación y sustentación promedio que siente es distinta de cero, lo que indica un rompimiento en la simetría del problema.

Así mismo el perfil cuenta con dos posiciones de máxima deformación, uno con la cola deflectada hacia arriba y otra hacia abajo, y la sustentación que sienten estos perfiles es una la negativa de la otra; es decir, el comportamiento de la sustentación como función del tiempo para los perfiles totalmente deformados es simétrico uno respecto al otro, lo que indica que la condición inicial del perfil influye en el signo de esta fuerza. De este modo se encontraron dos soluciones para el flujo alrededor de este perfil estático las cuales dependen de su condición inicial.

Así como la dirección de deformación para los perfiles estáticos modificaba el signo de la sustentación los perfiles flexibles podrían comportarse de la misma manera. Por ello fue necesario realizar los mismos experimentos sobre los perfiles partiendo con diferentes condiciones iniciales. Para el perfil no estático se puede partir con la configuración inicial dada por la Ecuación (2.6), donde se inicia con un perfil simétrico que comienza a deformarse moviendo la cola hacia abajo y el cuerpo hacia arriba, como se aprecia en la Figura 3.6 (a); también se puede iniciar con un perfil simétrico que comienza a deformarse en dirección contraria, como aprecia en la Figura 3.6 (b); dos condiciones iniciales más se muestran en las Figuras 3.6 (c) y (d), donde se parte de un perfil con deformación máxima que que tiende a un perfil simétrico.

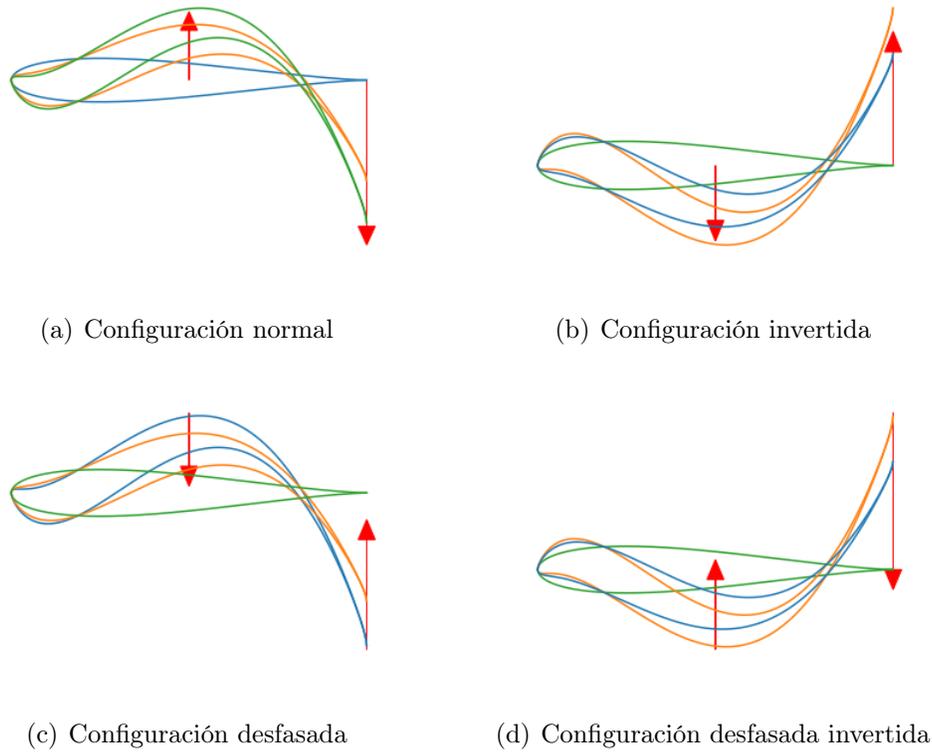


Figura 3.6: Esquemización de la geometría con diferentes configuraciones iniciales. La flecha en rojo indica la dirección de movimiento inicial.

Las cuatro configuraciones previamente explicadas fueron simuladas con el objetivo de estudiar el cómo estas afectan la sustentación y el rompimiento de la simetría del problema.

El comportamiento de C_L como función del tiempo es sinusoidal sin importar la condición inicial del perfil. Esta fuerza presenta el mismo comportamiento para los perfiles con las configuraciones normal y desfasada, así como para las invertida y desfasada invertida; es decir, si el movimiento inicial de la cola del perfil se realiza por debajo o sobre su eje se obtendrá el mismo comportamiento, por lo que es esta dirección inicial de movimiento lo que rompe la simetría del problema. El signo de la sustentación promedio que siente el perfil depende directamente de la zona en la cual se desplace inicialmente su cola siendo $\langle C_L \rangle = 0.011$ para los perfiles con configuraciones iniciales normal y deformado, y -0.011 para los otros dos.

El problema sufre de un rompimiento en su simetría espacio-temporal [24] y se

da por la diferencia en la intensidad de los vórtices positivos y negativos, siendo el movimiento inicial el que favorece más a unos vórtices que a otros. En la Figura 3.7 (a) se aprecia que son los vórtices positivos los más intensos, obteniendo una sustentación promedio negativa, mientras que en la Figura 3.7 (b) son los vórtices negativos los más intensos siendo la sustentación promedio positiva.

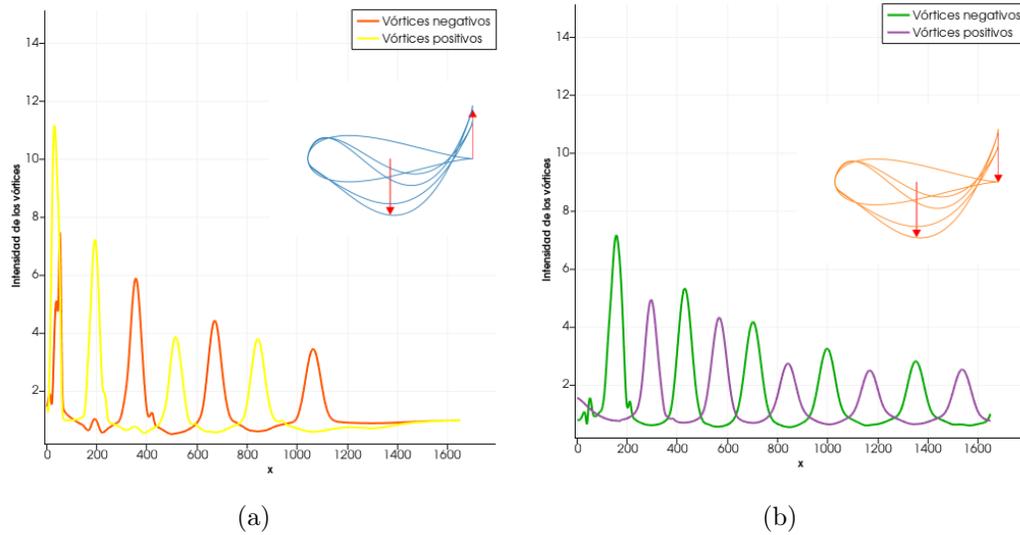


Figura 3.7: Intensidad de los vórtices desprendidos como función de la distancia al centro del perfil.

Estos resultados permiten determinar que existen dos soluciones para este problema en el intervalo de parámetros simulados en este trabajo. Estas dos soluciones son una la reflexión de la otra, siendo la dirección del movimiento inicial del perfil lo que determina la solución y por ende el signo de la sustentación; el problema es sensible a su condición inicial. Al simular los perfiles mostrados en las Figuras 3.6 (a) y (c) se obtendrá una sustentación positiva ya que los vórtices más intensos son los negativos, mientras que para las mostradas en las Figuras 3.6 (b) y (d) se obtendrá una sustentación negativa al ser los vórtices negativos los más intensos. Para las geometrías con parámetro $B = 0.4$ y $A = 2, 2.5$ y 3 , las cuales presentaban una sustentación promedio negativa, al ser el movimiento del cuerpo mucho mayor que el de la cola se favorece el desprendimiento de vórtices positivos más intensos que los negativos.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un perfil flexible basado en los perfiles simétrico y asimétrico de Joukowski al cual se le impuso un movimiento periódico. Se exploraron los parámetros geométricos del perfil al igual que las amplitudes y frecuencias de su movimiento. De esta manera se logró modelar un perfil flexible con un movimiento orgánico y se delimitaron rangos de valores para sus parámetros en los cuales la geometría perturbaba el flujo de manera visible. El movimiento orgánico de este perfil se logró al mover de manera semi-independiente su cuerpo y cola, ambos movimientos pesados por los parámetros adimensionales A y B , respectivamente.

Los experimentos consistieron en simular un fluido incompresible contenido en un canal infinito bidimensional en el cual se colocó el perfil flexible el cual estuvo fijo de un punto y enfrentado a un flujo unidireccional constante, se resolvieron de manera numérica las ecuaciones de Navier-Stokes con la condición de frontera de no deslizamiento con la ayuda del método de Boltzmann en redes con el esquema D2Q9 y aproximación BGK. Se obtuvieron los coeficientes de las fuerzas de arrastre y sustentación como función de los parámetros A y B , así como una visualización de las estelas que se formaron detrás de estos perfiles.

Al analizar las estelas estas pudieron ser clasificadas como función no de los parámetros A o B por separado sino de la razón A/B , de este modo se logró encontrar un parámetro que modula el comportamiento del perfil, reduciendo la cantidad de parámetros libres. Dicho de otro modo, los perfiles que comparten el mismo valor

de A/B forman la misma estructura en la calle detrás de ellos. Este resultado fue medular ya que permitió organizar el resto de los resultados. Las fuerzas como función de A/B tienen comportamiento que es más sencillo de analizar en comparación de los parámetros A y B por separado, lo que refuerza que el parámetro A/B es el parámetro relevante de este perfil.

Tanto el coeficiente de arrastre promedio como la amplitud de oscilación de esta fuerza son monótonas decrecientes como función de A/B , siendo las geometrías que forman una estela tipo calle de von Kármán las que maximizan el arrastre promedio mientras que las estelas $1P + 2S$ lo minimizan.

Se encontró la existencia de dos soluciones para la sustentación, una la reflexión de la otra, las cuales dependen de la condición inicial del perfil; es decir, dependiendo de la dirección del primer movimiento del perfil se encontrará una u otra solución. El cambio en el signo de la sustentación está asociado al rompimiento en la simetría espacio-temporal del problema, resultado de la asimetría entre los vórtices desprendidos; en el caso de la sustentación positiva los vórtices negativos son más intensos que los positivos y viceversa.

Perspectivas a futuro

Con los resultados anteriores es posible enfocar posteriores experimentos sobre este mismo perfil variando su frecuencia de oscilación, buscando aquella frecuencia que optimice el nado y analizando desde otro punto de vista el desprendimiento de vórtices; ya se ha mostrado cómo la frecuencia de oscilación de las geometrías está ligada a las transiciones arrastre-empuje [8], por lo que estos experimentos complementarían muy bien este trabajo.

Algunos otros experimentos podrían consistir en enfrentar al perfil a diversos flujos cambiando el número de Reynolds, de este modo podrían estudiarse de nuevo las fuerzas en un entorno más realista (números de Reynolds de orden de 10^5). En el artículo "On the Force Around a Flapping Foil" [20] el perfil simulado es enfrentado a un flujo de $Re \geq 100$ ya que son regiones donde se ha caracterizado la transición arrastre-empuje y buscar esta transición con el perfil aquí estudiado sería un gran

suplemento.

Que el perfil esté fijo puede ser un impedimento al momento de dar conclusiones acertadas, ya que el comportamiento de las fuerzas es diferente considerando un perfil libre; el experimento de soltar el perfil y observar su comportamiento es necesario si se quiere analizar su viabilidad en el nado.

Bibliografía

- [1] C Dominik Güss, Sarah Ahmed, and Dietrich Dörner. From da vinci's flying machines to a theory of the creative process. *Perspectives on Psychological Science*, 16(6):1184–1197, 2021.
- [2] Norman F Smith. Bernoulli and newton in fluid mechanics. *The Physics Teacher*, 10(8):451–455, 1972.
- [3] Eastman Nixon Jacobs, Kenneth Edwards Ward, and Robert McLean Pinkerton. *The Characteristics of 78 related airfoil section from tests in the Variable-Density Wind Tunnel*. US Government Printing Office, 1933.
- [4] Min Je Kim and Jae Hwa Lee. Wake transitions of flexible foils in a viscous uniform flow. *Physics of Fluids*, 31(11):111906, 2019.
- [5] Zhe Fang, Chunlin Gong, Alistair Revell, Gang Chen, Adrian Harwood, and Joseph O'connor. Passive separation control of a naca0012 airfoil via a flexible flap. *Physics of Fluids*, 31(10):101904, 2019.
- [6] Yongsheng Lian and Wei Shyy. Laminar-turbulent transition of a low reynolds number rigid or flexible airfoil. *AIAA journal*, 45(7):1501–1513, 2007.
- [7] J-M Miao and M-H Ho. Effect of flexure on aerodynamic propulsive efficiency of flapping flexible airfoil. *Journal of Fluids and Structures*, 22(3):401–419, 2006.
- [8] Jamie M Anderson, K Streitlien, DS Barrett, and Michael S Triantafyllou. Oscillating foils of high propulsive efficiency. *Journal of Fluid mechanics*, 360:41–72, 1998.

- [9] Ravi Jain and Usman Mohammad. Cfd approach of joukowski airfoil ($t= 12\%$), comparison of its aerodynamic performance with naca airfoils using $k-\varepsilon$ turbulence model with 3 million reynolds number. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(10):1414–1418, 2018.
- [10] Jabir Ubaid Parakkal, Khadije El Kadi, Ameen El-Sinawi, Sherine Elagroudy, and Isam Janajreh. Numerical analysis of vawt wind turbines: Joukowski vs classical naca rotor’s blades. *Energy Procedia*, 158:1194–1201, 2019.
- [11] Jos Stam and Ryan Schmidt. On the velocity of an implicit surface. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 30(3):1–7, 2011.
- [12] Edward Lewis. *Lattice Boltzmann methods for flows of complex fluids*. PhD thesis, Cardiff University, 2017.
- [13] Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P Gross, and Max Krook. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical review*, 94(3):511, 1954.
- [14] Stephen Wolfram. Cellular automaton fluids 1: Basic theory. *Journal of statistical physics*, 45(3):471–526, 1986.
- [15] Timm Krüger, Halim Kusumaatmaja, Alexandr Kuzmin, Orest Shardt, Goncalo Silva, and Erlend Magnus Viggen. The lattice boltzmann method. *Springer International Publishing*, 10(978-3):4–15, 2017.
- [16] Zhaoli Guo, Chuguang Zheng, and Baochang Shi. An extrapolation method for boundary conditions in lattice boltzmann method. *Physics of fluids*, 14(6):2007–2010, 2002.
- [17] O Filippova and D Hänel. Lattice-boltzmann simulation of gas-particle flow in filters. *Computers & Fluids*, 26(7):697–712, 1997.
- [18] Renwei Mei, Dazhi Yu, Wei Shyy, and Li-Shi Luo. Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry. *Physical Review E*, 65(4):041203, 2002.

- [19] Graham K Taylor, Robert L Nudds, and Adrian LR Thomas. Flying and swimming animals cruise at a strouhal number tuned for high power efficiency. *Nature*, 425(6959):707–711, 2003.
- [20] F Mandujano and C Málaga. On the forced flow around a rigid flapping foil. *Physics of Fluids*, 30(6):061901, 2018.
- [21] Charles HK Williamson and Anatol Roshko. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *Journal of fluids and structures*, 2(4):355–381, 1988.
- [22] Guo-Yi He, Qi Wang, Xing Zhang, and Shu-Guang Zhang. Numerical analysis on transitions and symmetry-breaking in the wake of a flapping foil. *Acta Mechanica Sinica*, 28(6):1551–1556, 2012.
- [23] Xingjian Lin, Shuhao Guo, Jie Wu, and Jingwen Nan. Aerodynamic performance of a flapping foil with asymmetric heaving motion near a wall. *Journal of Bionic Engineering*, 15(4):636–646, 2018.
- [24] Damien Jallas, Olivier Marquet, and David Fabre. Linear and nonlinear perturbation analysis of the symmetry breaking in time-periodic propulsive wakes. *Physical Review E*, 95(6):063111, 2017.