Medios Deformables

Elasticidad

30/agosto/2020

*) Medios deformables

i) Elasticidad

→ Termoelasticidad

→ Plasticidad.

ii) Dinámica de fluidos

→ Fluidos ideales

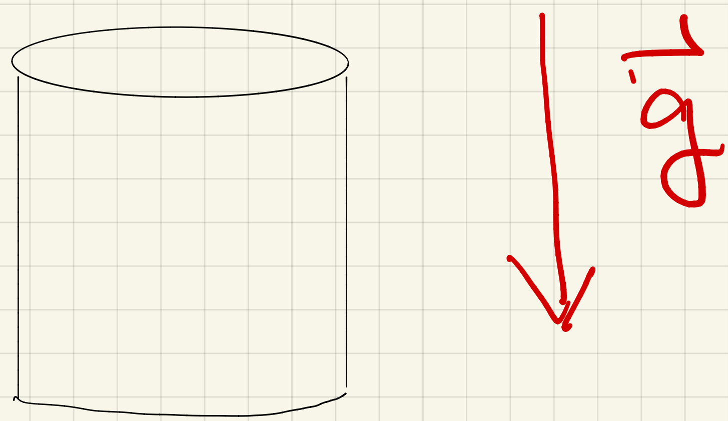
→ Fluidos viscosos. (Newtonianos)

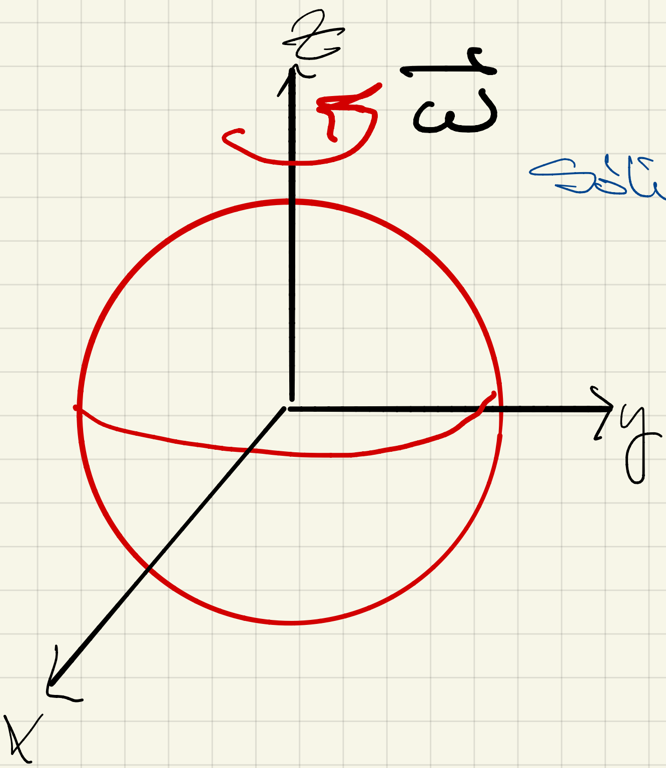
→ Fluidos viscoelásticos

i) Equilibrio de cuerpos elásticos

→ Termoelasticidad

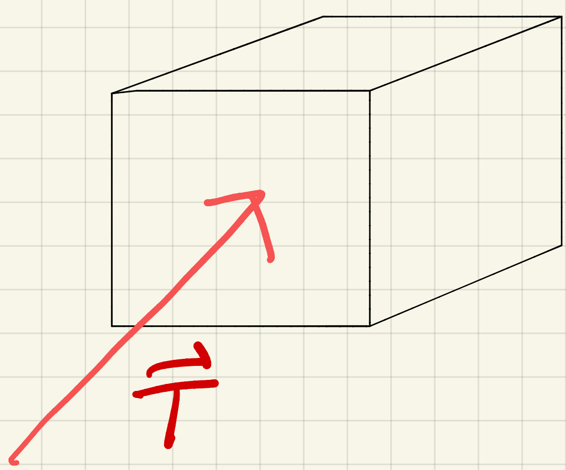
Sólido en un campo de fuerzas





Sólidos en rotación

Sólidos sujetos a fuerzas sup.



ii) Flexión de Barras y Placas.

ii) Dinámica de fluidos

→ Fluidos ideales (Euler)

*) Flujo invícido

**) Flujo potencial

→ Fluidos viscosos Newtonianos

*) Flujo lento $Re < 1$

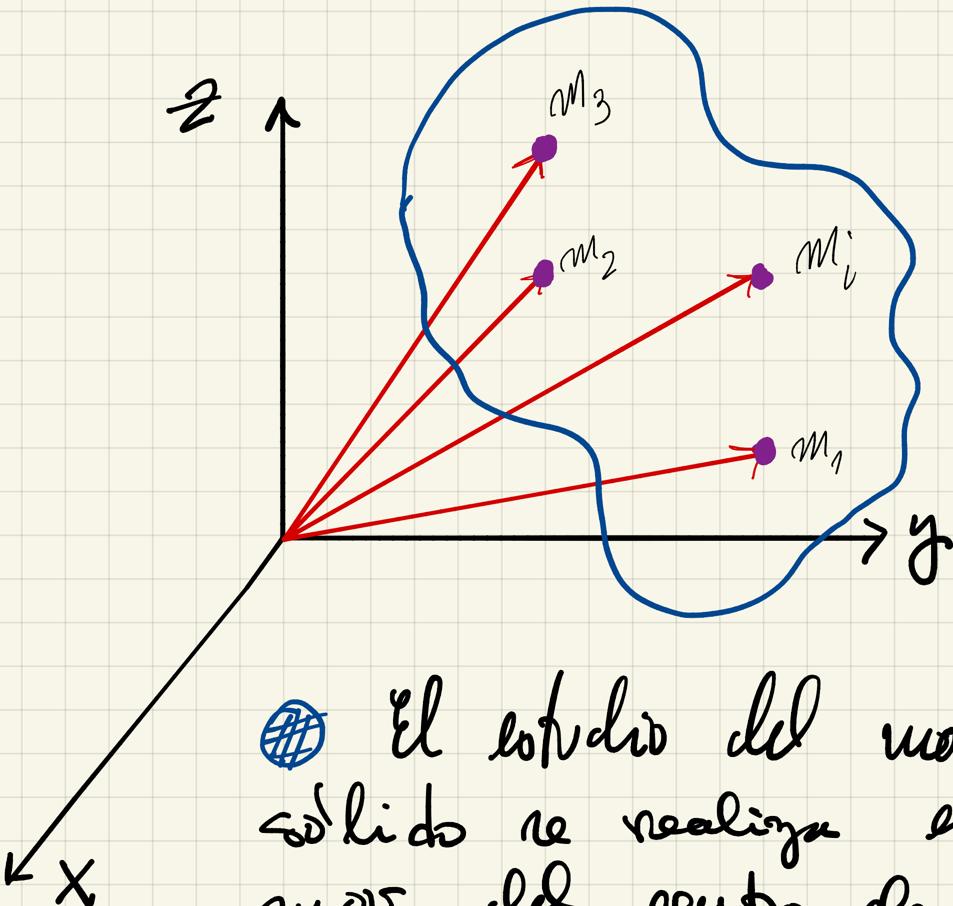
**) Flujo a Re altos

***) Turbulencia

→ Fluidos viscoelásticos

Teoría Clásica de Newton.

→ Sistemas de partículas.



$$m_i \vec{a}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ei}$$

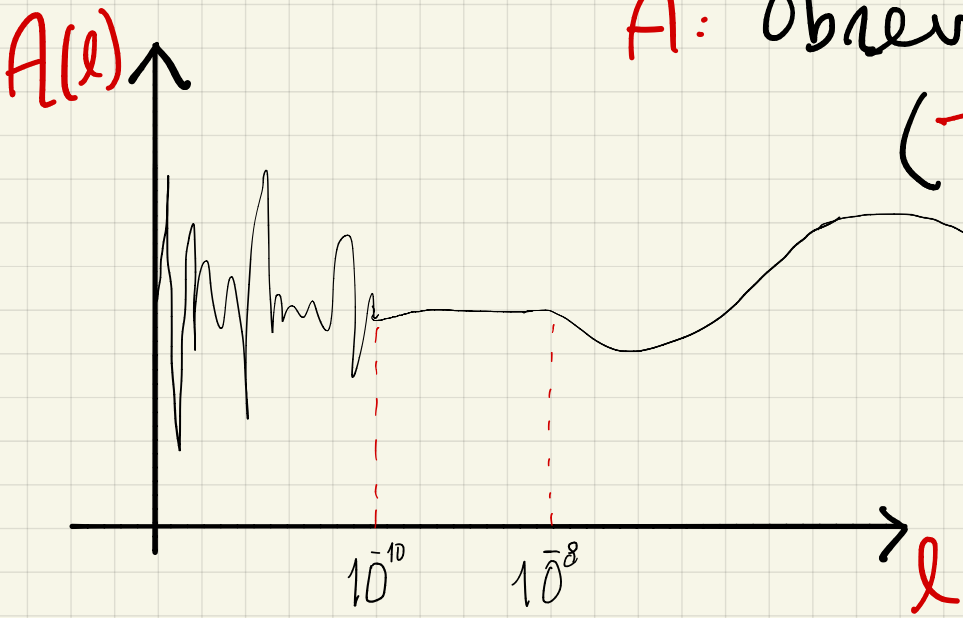
3N - ecs. dif.
de 2º orden

El estudio del movimiento del sólido se realiza estudiando el mov. del centro de masa y las rotaciones respecto de un sistema que pasa por el CM.

¿Y las deformaciones?

*) La Teoría de Medio Continuo

A: Observable
$(T(\ell), \rho(\ell), P(\ell))$



$\ell \sim 10^{-10} m$

$A(\ell) \sim cte$

$\Rightarrow \quad \delta V \sim 10^{-10} m$ pto. físico

δV contiene $\sim 10^{10}$ partículas

→ El medio se subdivide en "pequeños δV" que siempre contienen $\sim 10^{10}$ partículas de manera de los campos macroscópicos está bien definidos.

Hipótesis del Continuo

→ Las matemáticas

⇒ Cálculo tensorial

→ Campos escalares, vectoriales y ...

*) Funciones escalares

$\rho = \rho(\vec{r}, t)$: Densidad

$T = T(\vec{r}, t)$: Temperatura

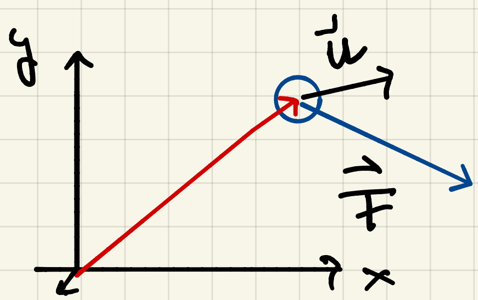
$P = P(\vec{r}, t)$: Presión

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{r}, t)$: observable... en general

**) Funciones Vectoriales

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$: velocidad

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$: fuerza

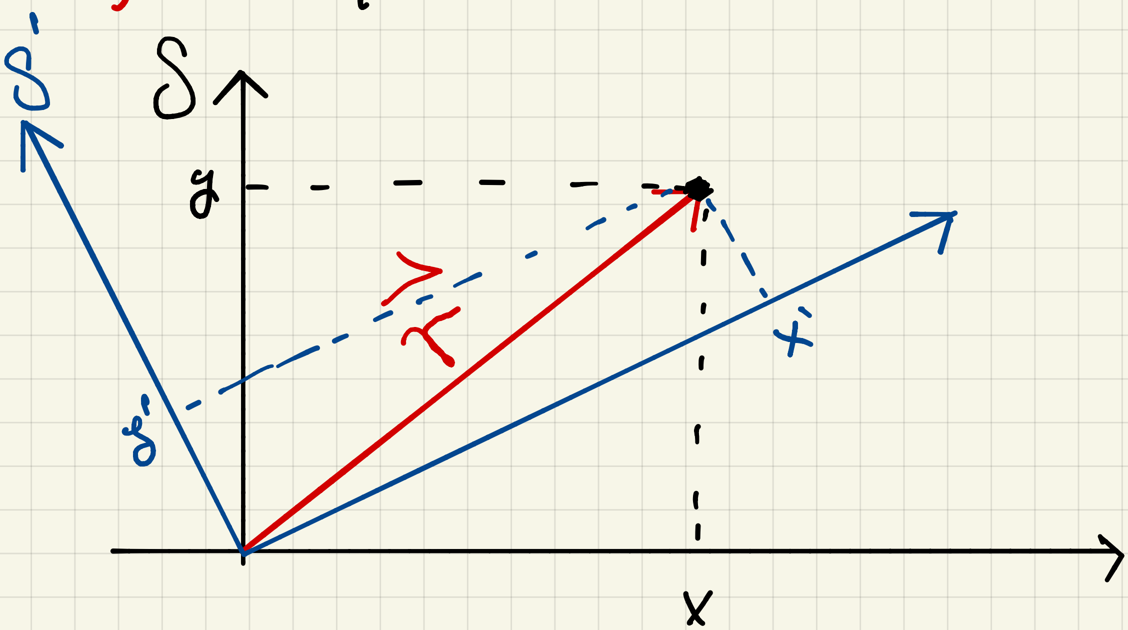


Torcas y momentos

$\vec{P}$ y $\vec{L}$ ...

*) Un repaso de Tensores.

i) Transformaciones de coordenadas



Notación: $(x, y, z) \longmapsto (x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \quad x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$$

Sup. $\exists \quad x_i = x_i(x_1', x_2', x_3')$

y es uno a uno.

$$\Rightarrow \quad dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} dx_j$$

* Se utiliza notación de Einstein

Definimos al vector contravariante como aquella n-ada de números cuyas componentes transforman según:

$$A'^{i} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} A^{j}$$

en donde $x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$.

— Vector covariante.

Sea $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ una función escalar.

Al efectuar una transformación de coordenadas

$$\Rightarrow \phi = \phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x_1', x_2', x_3')$$

por ser un escalar

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi'}{\partial x_i'} = \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$$

i.e,

$$A_i' = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} A_j$$

que es diferente al caso contravariante.

→ Entonces tenemos dos prototipos de transformación

a) Como las coordenadas

Vector Contravariante

$$A'^{i} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} A^j$$

b) Como los gradientes de un escalar

Vector Covariante

$$A_i' = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} A_j$$

Un arreglo de números que <u>NO</u> satisface las propiedades anteriores <u>NO</u> es un Vector.

i.e.,
Un vector es un arreglo de números y, EN GENERAL, un arreglo de números <u>NO</u> es necesariamente un Vector.

Una generalización

*) Tensores.

Definimos un tensor de 2° orden a una matriz de $n \times n$ ∋ sus elementos transforman según

$$A'^{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_l}\frac{\partial x_j'}{\partial x_k} A^{lk}$$ 2 veces contravariante

$$B'^{i}_{j} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_l}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'} B^{l}_{k}$$ Tensor mezclado

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_l}{\partial x_i'}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'} C_{lk}$$ 2 veces covariante

Algebra Tensorial

i) Suma

$$A^{ij} = B^{ij} + C^{ij}$$
$$A^{i}_{j} = B^{i}_{j} + C^{i}_{j}$$
$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$$

Elemento a elemento y deben ser de la misma clase.

La delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

Teo: $\delta^{ijk\ldots}_{pqr\ldots} A_i B_j C_k \cdots D^p E^q F^r \cdots$ = invariante

Cor. $\delta^{j}_{i} B_j$ = vector covariante

Ahora, tenemos la reducción

$$\delta^{j}_{i} B_j = B_i$$

i.e, δ^{j}_{i}: es un tensor mezclado.

De la regla de transformación para tensores mezclados,

$$\delta'^{\,i}_{\;i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\,\delta^l_k \Rightarrow l = k$$

$$= \frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i}$$

$$\therefore \quad \delta'^{\,i}_{\;i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_i}$$

además, la delta de Kronecker es un tensor isotrópico, i.e, tiene la misma forma en cualquier sistema coordenado.

→ Contracción (producto interno)

si a_i y b^i son las componentes de 2 vectores

$$\Rightarrow \quad (a_i b^i)' = \frac{\partial x_n}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} a_i b^i$$

$$= a_i b^i = \text{invariante}$$

para tensores de 2º orden

$$B_i^{i'} = \frac{\partial x_m}{\partial x_l} B_m^l = B_l^l$$

i.e., la traza es un invariante.

$$A^i_n B^n_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_m}{\partial x'_n} A^l_n B^n_m$$

$$C^i_j = A^i_n B^n_j \quad \text{es tensor de orden 2}$$

→ Producto Directo

sea $C_i^j = a_i b^j$

$$\Rightarrow \quad C_i^{j\,\prime} = \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} a_l \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} b^k$$

$$= \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} a_l b^k$$

i.e., C_i^j es un tensor mezclado de 2° orden.

Esto se puede generalizar a tensores de orden mayor, p. ej.,

$C_{il}^{jk} = A_i^j B_l^k$ es un tensor mezclado de 4° orden.

Nótese que el producto interno siempre se hace igualando un índice abajo (covariante) y uno arriba (contravariante) y la notación de suma de Einstein.

→ El gradiente de un vector

$$[\nabla]_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right]' = \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial x_1'}{\partial x_m} u^k$$

en general $x_1' = x_1'(x_1, x_2, x_3)$

entonces si $\frac{\partial x_1'}{\partial x_m}$ no depende de los x_i's

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_i}\right]' = \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \frac{\partial x_1'}{\partial x_m} \frac{\partial u^k}{\partial x_l}$$

i.e., el gradiente de un vector es un tensor mezclado de 2º orden.

→ Geometría Euclideana

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_l}$$

No hay que hacer diferencia, escribimos todos los índices abajo.

→ Pseudo – Tensores

*) Sea A un invariante y nos preguntamos por su integral en una región de espacio;

i.e. $$\int A\,dV = ¿?$$

del cálculo si $x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \int A\,dV = \int \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_1'}\right| A\,dV'$$

i.e, $$\int A\,dV \neq \int A\,dV'$$

para satisfacer que $\int A\,dV = \int A'\,dV'$

$$\Longleftrightarrow \quad A' = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_1'}\right| A$$

– Esta idea se puede generalizar al concepto de tensor.

→ el tensor de Levi-Civita

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{permutación par de } ijk \\ -1 & \text{" impar de } ijk \\ 0 & \text{si se repite alguno} \end{cases}$$

para que sus elementos sean invariantes

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^{ijk\,'} = \left|\frac{\partial x_l}{\partial x'_h}\right| \frac{\partial x'_i}{\partial x_n} \frac{\partial x'_j}{\partial x_p} \frac{\partial x'_k}{\partial x_q} \varepsilon^{npq}$$

→ esta transformación difiere en el 1er factor. Por construcción este pseudo-tensor anti-simétrico 3-veces contra-variante es isotrópico.

→ Notación, operadores diferenciales y teoremas integrales.

→ Notación vectorial y diádicas

*) Vectores Base

i) Canónicos $\hat{e}_i$:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$ (Conjunto completo de vec. ortonormales).

→ Diádicas.

⇒ $\vec{u} = u_i \hat{e}_i$ Vector

$\underset{\sim}{\tau} = \hat{e}_i \tau_{ij} \hat{e}_j$ Tensor 2° orden

en las dos se usó la convención de suma

*) Producto interno

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_j \; \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

$$= u_i u_i$$

$$\vec{u} \cdot \underset{\sim}{\tau} = u_i \tau_{jk} \; \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \hat{e}_k$$

$$= u_i \tau_{ij} \; \hat{e}_j$$

$$\underset{\sim}{\tau} \cdot \vec{u} = \tau_{ij} u_j \; \hat{e}_i$$

$$\underset{\sim}{\tau} \cdot \underset{\sim}{\sigma} = \hat{e}_i \tau_{ij} \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k \sigma_{kl} \hat{e}_l$$

$$= \hat{e}_i \tau_{ij} \sigma_{jl} \hat{e}_l$$

$$\underset{\sim}{\tau} : \underset{\sim}{\sigma} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k \; \tau_{ij} \sigma_{kl} \; \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l$$

$$= \tau_{ij} \sigma_{ij} = \text{invariante}.$$

**) Producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_i v_j \, \hat{e}_i \times \hat{e}_j$$

y $\quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \hat{e}_k$$

***) Operadores diferenciales.

- Gradiente

$$\nabla \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

→ Escalar

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_i \qquad \text{Vector}$$

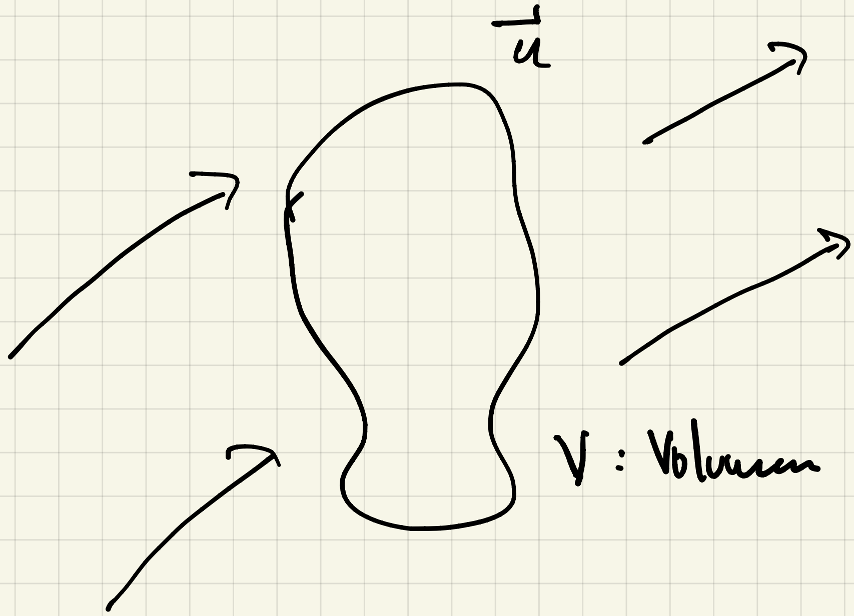
→ Vector.

$$\nabla \vec{u} = \hat{e}_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \hat{e}_j \qquad \text{Tensor de 2° orden.}$$

→ No será necesario más ... para este curso.

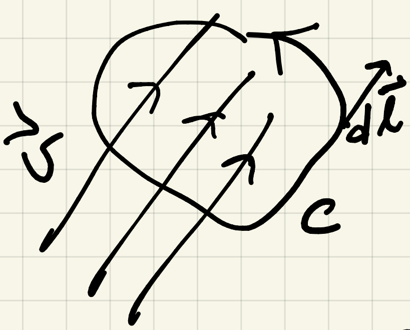
→ Teoremas integrales

→ Teorema de la divergencia



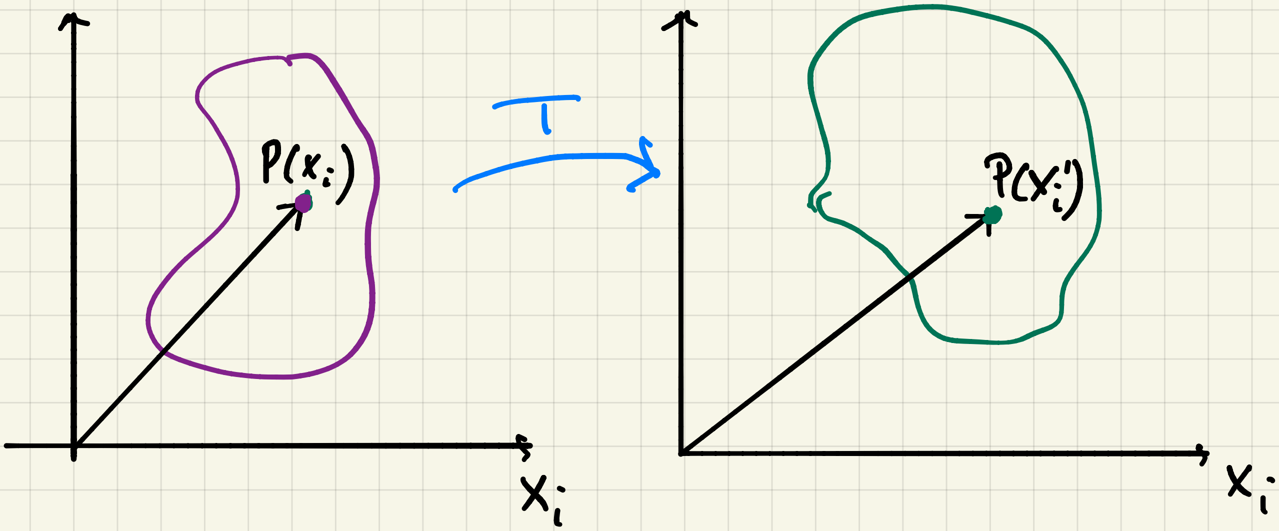
$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\, dV = \int_S \tau_{ij}\, n_i\, dS$$

→ Teorema de Stokes.



$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{v}\, dS$$

Elasticidad lineal.



→ La deformación se puede ver como una transformación lineal uno a uno, i.e,

$$x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$$

$$\therefore \ \exists \quad x_i = x_i(x_1', x_2', x_3')$$

Aquí las x_i' representan ptos después de la transformación.

i) Transformaciones lineales (afines)

$$x_i' = \alpha_{i0} + (\alpha_{ij} + \delta_{ij}) x_j$$

La transformación inversa es de la forma:

$$x_i = \beta_{i0} + (\beta_{ij} + \delta_{ij}) x_j'$$

iv) Transformaciones sucesivas.

$$x_i' = \alpha_{i0} + (\alpha_{ij} + \delta_{ij})\, x_j'$$

y $$x_i'' = \gamma_{i0} + (\gamma_{ij} + \delta_{ij})\, x_j'$$

$$\Rightarrow \quad x_i'' = \gamma_{i0} + (\gamma_{ij} + \delta_{ij})\left(\alpha_{0j} + (\alpha_{il} + \delta_{il})\, x_l'\right)$$

$$= \left(\alpha_{i0} + (\gamma_{ij} + \delta_{ij})\alpha_{0j}'\right) + (\gamma_{ij} + \delta_{ij})(\alpha_{il} + \delta_{il})\, x_l')$$

$$= \beta_{0j} + (\gamma_{il} + \alpha_{il} + \delta_{il})\, x_l + O(\gamma_{ij}\alpha_{il})$$

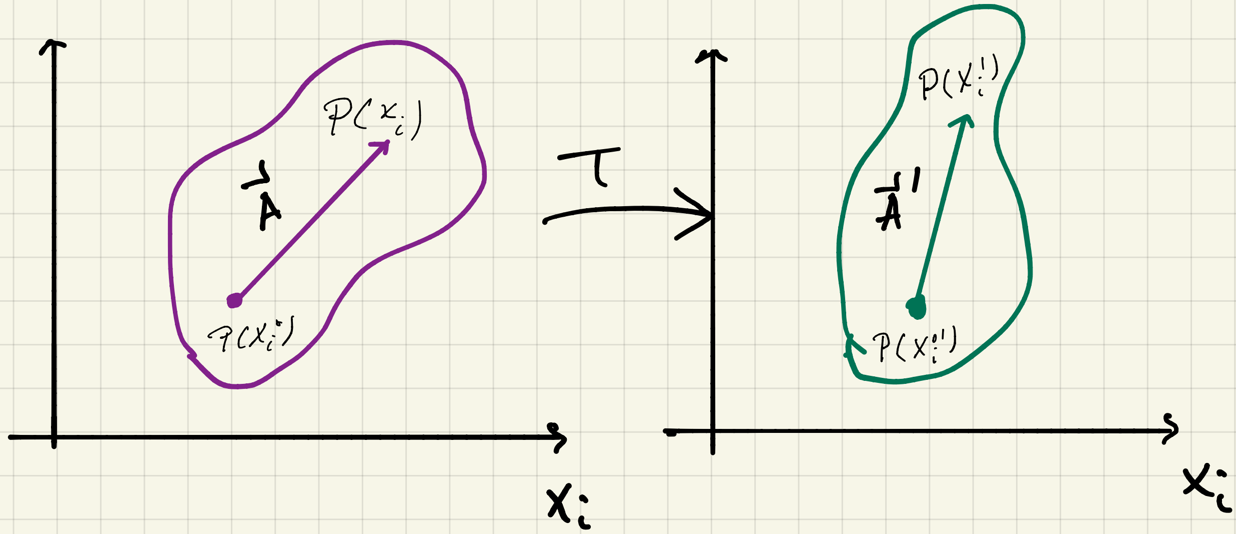
i.e., si $\gamma_{ij}\alpha_{il} <<< 1$

$\Rightarrow$ la aplicación de dos transformaciones afines es afín: Transf. afín infinitesimal $\alpha_{ij} < 1$

Definimos deformación homogénea cuando los puntos después de la transformación satisfacen que

$$x_i' = \alpha_{i0} + (\alpha_{ij} + \delta_{ij})\, x_j'$$

con $\alpha_{ij} < 1$



- Veamos cómo transforma un vector: $\vec{A}$

$\Rightarrow \quad A_i = x_i - x_i^0 \quad$ y $\quad A_i' = x_i' - x_i^{0\prime}$

y de la transformación afín

$$x_i' - x_i^{0\prime} = (\alpha_{ij} + \delta_{ij})(x_j - x_j^0)$$

i.e., $A_i' = \alpha_{ij} A_j + \delta_{ij} A_j$ sea $\delta A_i = A_i' - A_i$

$$\Longrightarrow \quad \delta A_i = \alpha_{ij} A_j$$

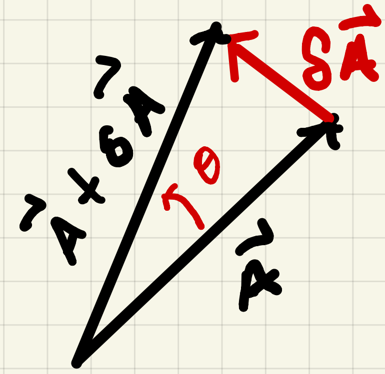
y $\quad A_i' = A_i + \delta A_i$

La norma de $\vec{A}'$

$$(A_i + \delta A_i)^2 = A_i^2 + 2A_i \delta A_i + \cancelto{0}{\delta A_i^2}$$

si la transformación es una rotación nada más $\Longrightarrow |\vec{A}'| = |\vec{A}| = A$

$\therefore \quad A_i\, \delta A_i = 0$ como $\delta A_i = \alpha_{ij} A_j$



$$\Rightarrow \quad \alpha_{ij}\, A_i A_j = 0$$

Desarrollamos un poco

$$\alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{22} A_2^2 + \alpha_{33} A_3^2$$
$$+ (\alpha_{12}+\alpha_{21}) A_1 A_2$$
$$+ (\alpha_{23}+\alpha_{32}) A_2 A_3$$
$$+ (\alpha_{13}+\alpha_{31}) A_1 A_3 = 0$$

$\therefore \quad \alpha_{ii} = 0$ (No suma)

y $\quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$

$\therefore$ si α_{ij} es antisimétrica y los elementos en la diagonal se anulan ent α_{ij} representa rotaciones puras.

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{A} = \alpha_{12} A_2 \hat{e}_1 + \alpha_{13} A_3 \hat{e}_1$$
$$+ \alpha_{21} A_1 \hat{e}_2 + \alpha_{23} A_3 \hat{e}_2$$
$$+ \alpha_{31} A_1 \hat{e}_3 + \alpha_{32} A_2 \hat{e}_3$$

Usamos que $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$

$$\alpha_{12} = -\omega_3$$
$$\alpha_{31} = -\omega_2$$
$$\alpha_{23} = -\omega_1$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{A} = (\omega_2 A_3 - \omega_3 A_2)\,\hat{e}_1$$
$$-(\omega_1 A_3 - \omega_3 A_1)\,\hat{e}_2$$
$$+(\omega_1 A_2 - \omega_2 A_1)\,\hat{e}_3$$

En donde se definió

$$\omega_1 = \alpha_{32}$$
$$\omega_2 = \alpha_{13}$$
$$\omega_3 = \alpha_{21}$$

en notación de índices:

$$\delta A_k = \varepsilon_{ijk}\,\omega_i A_j$$

i.e $\vec{A}'$ es de la forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\delta\phi} \times \vec{A}$$

recuérdese que los elementos α_{ij} son pequeños.

Ahora, tomando en cuenta que toda matriz se puede descomponer en una parte antisimétrica más una simétrica

$$\Rightarrow \quad \alpha_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

en donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \quad \text{Matriz simétrica}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \quad \text{Matriz antisimétrica}$$

Como $\underset{\sim}{\omega}$ representa rotaciones y traslaciones de cuerpo rígido

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{e}$: Representa deformaciones puras

$$\boxed{\text{Matriz de deformación}}$$

– Interpretación geométrica de $\underset{\sim}{e}$

i) Extensión simple

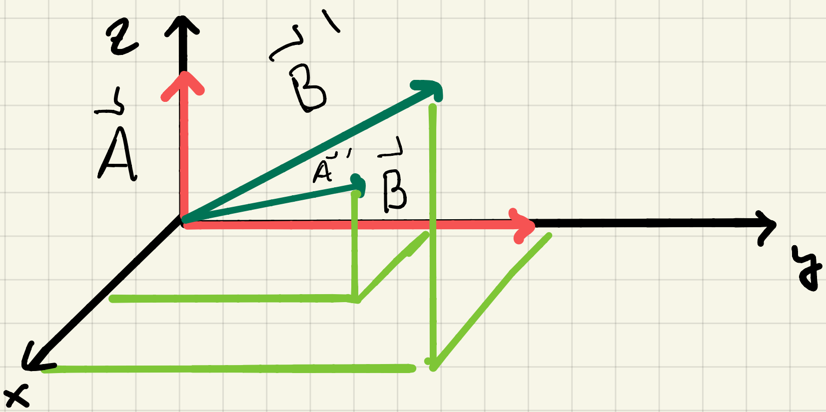
$w_{ij} = 0$ y $e_{11} \neq 0$ cero los demás.

Ya teníamos que:

$$\delta A_i = e_{i1} A_1 \quad \text{ó} \quad \delta A_1 = e A_1$$

$$\therefore \quad \frac{\delta A_1}{A_1} = e$$ Cambio de longitud por unidad de longitud.

ii) Corte puro.



$$\vec{A} = A_3 \hat{e}_3 \quad \text{y} \quad \vec{B} = B_2 \hat{e}_2$$

después de la deformación: $(A_i' = A_i + \delta A_i)$

$$\vec{A}' = \delta A_1 \hat{e}_1 + \delta A_2 \hat{e}_2 + (A_3 + \delta A_3)\hat{e}_3$$

$$\vec{B}' = \delta B_1 \hat{e}_1 + (B_2 + \delta B_2)\hat{e}_2 + \delta B_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = B_2 \delta A_2 + A_3 \delta B_3 + \theta(\delta^2)$$

si $\theta \measuredangle (\vec{A}', \vec{B}')$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{A}' \cdot \vec{B}'}{A'B'}$$

Si sup que la deformación es tal que $e_{ij} = 0$ si $i = j$

$$\Rightarrow \quad A'B' \simeq AB = A_3 B_2$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\delta A_2}{A_3} + \frac{\delta B_3}{B_2}$$

sea $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

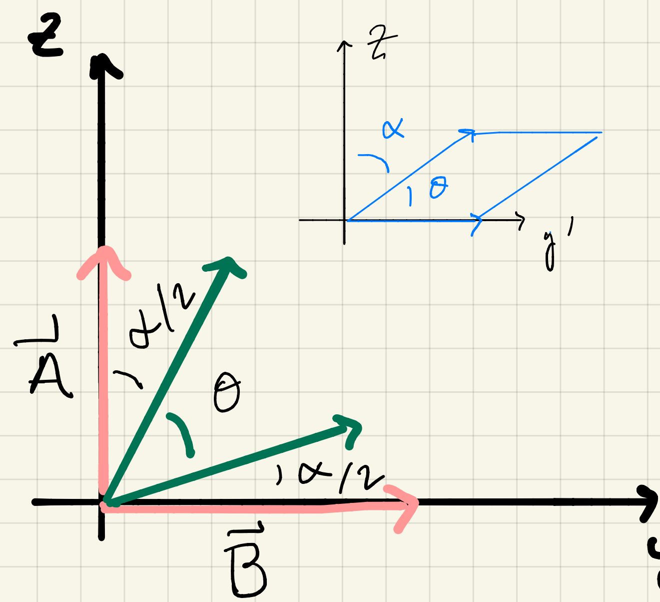
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \delta A_i = \alpha_{ij} A_j$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta A_2}{A_3} = e_{23} \quad \text{y} \quad \frac{\delta B_3}{B_2} = e_{32}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = 2 e_{23}$$

como $e_{ij} < 1$

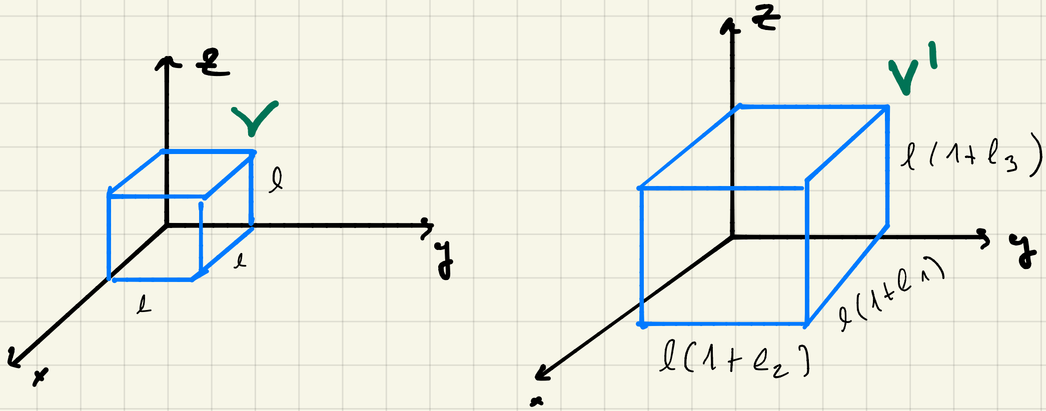
$$\boxed{\Rightarrow \quad e_{23} = \frac{1}{2}\alpha}$$



★ Corte puro

iii) Expansión

$$e_{ii} = e_i \quad (\text{no suma})$$



$$\frac{\delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} \quad \text{con} \quad V = l^3$$

$$= (1+e_1)(1+e_2)(1+e_3) - 1$$

$$\frac{\delta V}{V} \cong e_1 + e_2 + e_3$$ puesto que despreciamos términos de 2° orden.

$$\therefore \quad \frac{\delta V}{V} = \mathrm{tz}(\underset{\sim}{e})$$

$$\mathrm{tz}(\underset{\sim}{e}) = e_{ii}$$

$$\boxed{\text{Deformación general: Expansión + corte puro}}$$

- Se debe aclarar que el resultado sólo es cierto en el límite de transformaciones afines infinitesimales y materiales homogéneos. Este resultado se va a generalizar más adelante.

→ El Tensor de deformación $\underset{\sim}{e}$

i) Las sup. cuadráticas de Cauchy

Ya teníamos que: $\delta A_i = e_{ij} A_j$

en donde $A_i = x_i - x_i^0$ si $x_i^0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \delta x_i = e_{ij} x_j$$

Ahora,

$$A \delta A = A_i \delta A_i$$

$$\Rightarrow \quad A \delta A = A_i A_j e_{ij}$$

Si suponemos que la deformación es tal que $\frac{\delta A}{A} = e$

$$\Rightarrow \quad e_{ij} x_i x_j = A^2 e = \pm k^2$$

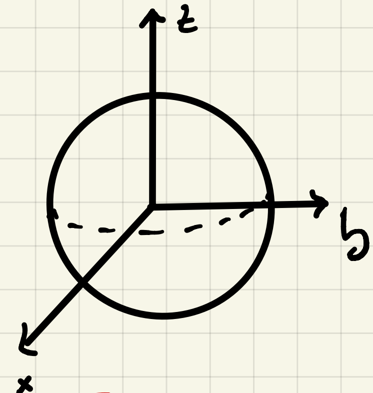
$$\therefore \quad e = \pm \frac{k^2}{A^2}$$ ley del inverso del cuadrado de la distancia

En general

$$G(x_1, x_2, x_3) = e_{ij} x_i x_j$$ forma cuadrática

$\Rightarrow$ si $G(x_1, x_2, x_3) = \pm k^2$ Sup. cuadrática

i) Expansión isotrópica



$$e_{ij} = e\,\delta_{ij}$$

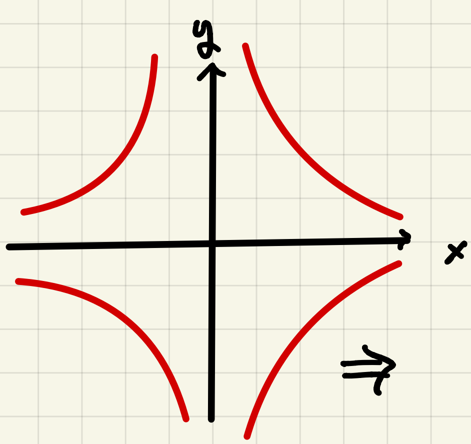
$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{k^2}{e}$ esferas

$$\boxed{\frac{\delta V}{V} = 3e}$$ Dilatación cúbica

ii) Corte plano

$$\underset{\sim}{e} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $2xy = \pm k^2$ hipérbolas equiláteras



$\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{\delta V}{V} = 0}$$

Dilatación cúbica

✱ Sistema de ejes principales.

Tenemos que la sup. cuadrática de deformación es

$$e_{ij} x_i x_j = \pm k^2 \equiv \text{escalar}$$

en el sistema (x_1, x_2, x_3).

Si ahora hacemos la transf. a un sistema (x_1', x_2', x_3') Nota: está es una transformación de coordenadas

$$\Rightarrow \quad e_{ij} x_i x_j = e_{ij}' x_i' x_j'$$

ahora, como $x_i = x_i(x_1', x_2', x_3')$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} x_l'$$

$$\Rightarrow \quad e_{ij}' x_i' x_j' = e_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} \frac{\partial x_j}{\partial x_m'} x_l' x_m'$$

$$= e_{lm} \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \frac{\partial x_m}{\partial x_j'} x_i' x_j'$$

$$\therefore \quad e_{ij}' = \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \frac{\partial x_m}{\partial x_j'} e_{lm} \quad \text{(Covariante)}$$

$\therefore$ e_{ij} es un tensor de 2º orden

→ El sistema de ejes principales es aquel en el que la superficie de deformación es un elipsoide.

Ya sabemos que: $\delta A_i = e_{ij} x_j$

en el sistema de ejes principales $e_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$\Rightarrow \quad \delta A_i = e\, x_i$$

$$\therefore \quad e_{ij} x_j = e\, \delta_{ij} x_j \quad \text{pues} \quad \delta_{ij} x_j = x_i$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad (e_{ij} - e\,\delta_{ij})\, x_j = 0}$$

problema de valores propios.

Para que el sistema tenga solución:

$$\det | e_{ij} - e\,\delta_{ij} | = 0$$

El polinomio característico tiene al menos una raiz real e_1. Las otras dos son, en general, de la forma

$$e_2 = E_1 + i E_2 \quad y \quad e_3 = \overline{e_2}$$

$$(l_{ij} - l_2\delta_{ij})\overset{2}{A}_j = 0$$

$$(l_{ij} - l_2\delta_{ij})\overset{2}{A}_j\overset{3}{A}_i = 0$$

$$(l_{ij} - l_3\delta_{ij})\overset{3}{\hat{A}}_j\overset{2}{A}_i = 0$$

$$(l_{ji} - l_3\delta_{ji})\overset{3}{A}_j\overset{2}{A}_j = 0$$

$$\left(\left(\cancelto{0}{l_{ij} - l_{ji}}\right) - (l_2\delta_{ij} - l_3\delta_{ij})\right)\overset{3}{A}_i\overset{2}{A}_j = 0$$

$$(l_2 - l_3)\overset{3}{A}_i\overset{2}{A}_i = 0$$

Ahora, como $l_2 = E_1 + iE_2 = l_3^*$

$\Rightarrow \overset{2}{A}_j = a_j + i b_j = \overset{3}{A}{}_j^*$

$\Rightarrow \overset{2}{A}_j\overset{3}{A}_j = a_j^2 + b_j^2 \neq 0$ si $a_i, b_i \neq 0$

$\Rightarrow l_2 - l_3 = 0 \quad \therefore \quad 2E_2 = 0$

i.e., l_2 y l_3 son reales y en general diferentes

$$\therefore \quad \overset{3}{A}_i\overset{2}{A}_i = 0$$

son ortogonales.

→ Todo tensor de 2° orden tiene tres invariantes: ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3

$$\vartheta_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{Traza}$$

$$\vartheta_2 = e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 \quad \text{Suma de menores}$$

$$\vartheta_3 = e_1 e_2 e_3 \quad \text{Determinante}$$

Estas cantidades se pueden escribir en de forma más general usando la delta de Kronecker generalizada $\delta^{pqr\ldots}_{ijk\ldots}$

- La superficie cuadrática de deformación en el sistema de ejes principales es:

$$e_1 X_1'^2 + e_2 X_2'^2 + e_3 X_3'^2 = k^2$$

Hasta este punto, solo se han estudiado deformaciones homogeneas, i.e, todo el material se describe por un tensor de deformación constante.

— Deformaciones infinitesimales generales.

i) El campo de desplazamientos

— Por definición el desplazamiento es: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_{fin} - \vec{r}_{ini}$

entonces, en una deformación homogénea el desplazamiento de un pto es:

$$u_i = x_i' - x_i \quad \text{de donde}$$

$$u_i^0 = x_i^{0\prime} - x_i^0$$

ahora $\delta A_i = A_i' - A_i$

y como $A_i = x_i - x_i^0$

$$\Rightarrow \quad \delta A_i = x_i' - x_i^{0\prime} - x_i + x_i^0$$

$$= (x_i' - x_i) - (x_i^{0\prime} - x_i^0)$$

$$= u_i - u_i^0$$

ahora, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \quad u_i^0 = u_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

y $\quad u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(A_1 + x_1^\circ, A_2 + x_2^\circ, A_3 + x_3^\circ)$

$$\Rightarrow \quad u_i - u_i^\circ = u_i(A_1 + x_1^\circ, A_2 + x_2^\circ, A_3 + x_3^\circ) - u_i(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$$

cuando x_j está muy cerca de x_j°

$$u_i - u_i^\circ = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} A_j + \theta(A_i A_i)$$

$$\Rightarrow \quad \delta A_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} A_j$$

↳ esto está "evaluado" en x_i que está en la vecindad centrada en x_i°.

Como $\quad \delta A_i = \alpha_{ij} A_j$

$$\therefore \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ya sabemos que:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$$

y $\quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji})$

De manera que:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ Tensor de Deformación

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ Matriz de Rotación

Cada "pedacito" del material es un material homogéneo diferente a los de al rededor. Por lo tanto, este material ya no es homogéneo.

Sin embargo, estas cantidades sólo son validas para deformaciones infinitesimales.

— Estudio de deformaciones elásticas.

*) El campo de desplazamientos está dado: $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$

**) el tensor de deformación está dado y ...¿?

*) $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

y $$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

además, $\delta A_i = (e_{ij} + \omega_{ij}) A_j$

en donde $A_j = x_j - x_j^0$ un vector.

**) $e_{ij} = e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$

como $$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

y sabemos que $e_{ij} = e_{ji}$

$\therefore$ seis ecuaciones para 3 incógnitas además de condiciones de frontera. Para determinar el campo de desplazamientos es necesario especificar ω_{ij}; aunque no son condiciones suficientes.

***) La dilatación cúbica.

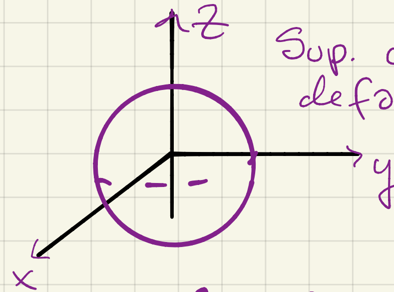
$$\frac{\delta V}{V} = e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{i.e,} \quad e_{ii} = \nabla \cdot \vec{u}$$

*) Expansión ó compresión.

$$\vec{u}(\vec{r}) = e\vec{r} \qquad \text{con} \qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$\Rightarrow$ como $$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{e} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$



Sup. cuadrática de deformación

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{k^2}{e}$$

esferas

Dilatación cúbica: $$\boxed{\frac{\delta V}{V} = 3e}$$

Conservan la forma

$e > 0$ expansión isotrópica

$e < 0$ compresión ✓

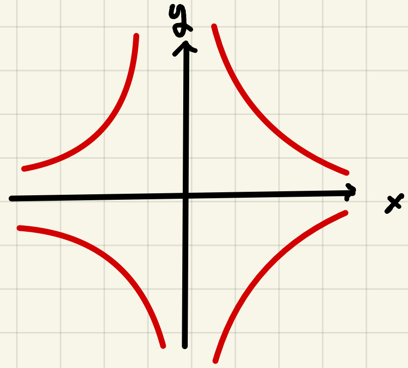
En este caso $\underset{\sim}{e}$ se ve igual en cualquier sistema coordenado ya que

$$e_{ij} = e\,\delta_{ij}$$

y δ_{ij} es un tensor isotrópico.

**) Corte puro

$$\vec{u}(\vec{r}) = s(y\hat{i} + x\hat{j})$$



Sup. de deformación

$$2xy = \pm h^2$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{e} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

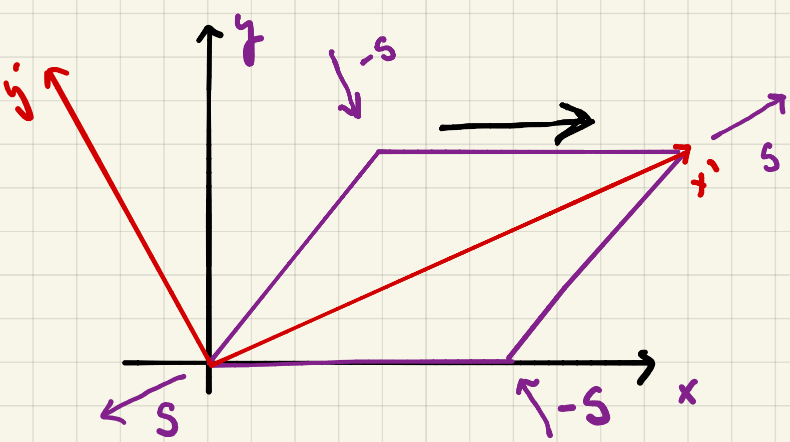
ejes principales Rotación de 45°

Prob. de Valores propios

$$\det| e_{ij} - \lambda \delta_{ij} | = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - s^2 = 0 \quad \text{i.e} \quad \lambda = \pm s$$

$$\therefore \quad \underset{\sim}{e}' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}$$ en el sistema de ejes principales



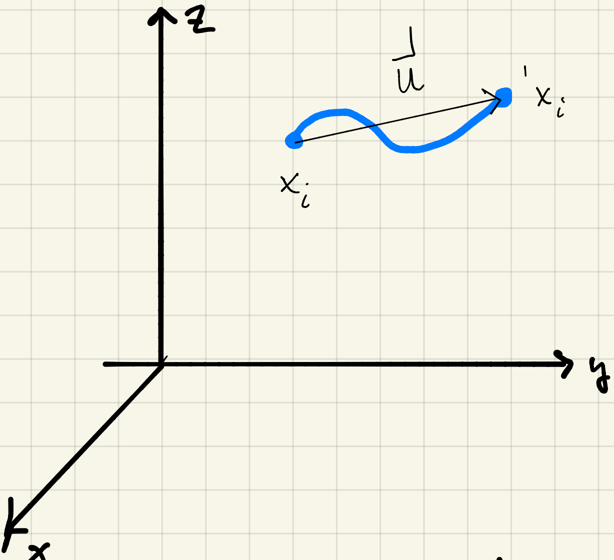
Dilatación cúbica

$$\frac{\delta V}{V} = 0$$

Conservan el volumen.

☆ Toda deformación infinitesimal se puede descomponer en una exp. isotrópica más dos cortes puros.

☆ Las condiciones de integrabilidad



x_i: pos. de un elemento material antes de la deformación

x_i': pos. después de la deformación

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \qquad \text{pues} \qquad u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$$

y $$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} du_i = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} e_{ij}\, dx_j + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \omega_{ij}\, dx_j$$

ahora: $$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \omega_{ij}\, dx_j = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \omega_{ij}\, d(x_j - x_j') \qquad dx_j' = 0$$

Integramos por partes

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \omega_{ij}\, dx_j = \omega_{ij}(x_j - x_j')\Big|_{\vec{r}}^{\vec{r}'} - \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l}(x_j - x_j')\, dx_l$$

Ahora, para la segunda integral

$$2\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u_l}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial e_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_i}$$

$$\therefore \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} du_i = (x_j' - x_j)\,\omega_{ij}^{\circ} + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} e_{ij}\, dx_j$$

$$+ \int \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_i}\right)(x_l' - x_l)\, dx_j$$

sea

$$U_{ij} = e_{ij} + (x_l' - x_l)\left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_i}\right)$$

y

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} du_i = u_i(\vec{r}') - \vec{u}_i^{\circ}$$

ω_{ij}° y u_i° la matriz de rotación y el campo de desplazamientos evaluado en el estado no deformado.

$$\therefore \quad u_i(x_1', x_2', x_3') = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j' - x_j) + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}\,'} U_{ij}\, dx_j$$

Para que du_i sea diferencial exacta

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j}$$

– Las derivadas cruzadas deben ser iguales.

como $\quad U_{ij} = e_{ij} + (x_l' - x_l)\left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_i}\right)$

$$\cancel{\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k}} - \delta_{lk}\left(\cancel{\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_l}} - \cancel{\frac{\partial e_{lj}}{\partial x_i}}\right) - \cancel{\frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j}} + \delta_{lj}\left(\cancel{\frac{\partial e_{ik}}{\partial x_l}} - \cancel{\frac{\partial e_{lk}}{\partial x_i}}\right)$$

$$+ (x_l' - x_l)\left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial e_{lk}}{\partial x_j \partial x_i}\right) = 0$$

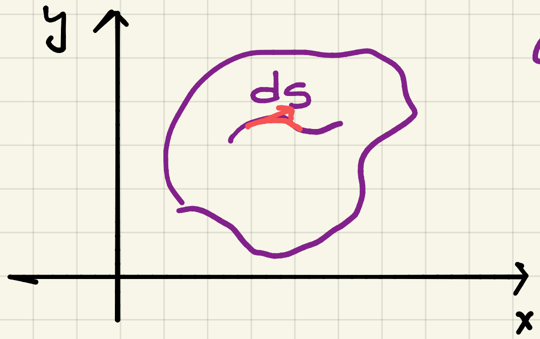
$\Rightarrow$ Ecuaciones de Compatibilidad.

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial e_{lk}}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

Saint-Venant (1860)

$(3)^4 = 81$ Ecuaciones, pero sólo 6 indep.

- Deformaciones finitas.



a) Descripción Lagrangiana

$\vec{r} \rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ V.I.

Se sigue al elemento de volumen.

(edo no deformado $\{X_i\}$)

b) Descripción Eleriana

$\vec{r} \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ V.I. (edo deformado $\{x_i'\}$)

El elemento de volumen está fijo en el espacio.

a) Lagrangiana $\{a_1, a_2, a_3\}$

$$ds_0^2 = da_i da_i \quad \text{antes}$$

$$ds^2 = dx_i dx_i \quad \text{después}$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - da_i da_i$$

como $\quad x_i = x_i(a_1, a_2, a_3)$

$$\Rightarrow \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) da_i da_j$$

ahora, buscamos escribir los jacobianos en términos de las derivadas del campo de desplazamientos.

$$\Rightarrow \qquad u_i = x_i - a_j$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}$$

$$ds^2 - ds_0^2 = \left\{ \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \delta_{kj} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_i} + \delta_{ki} \right) - \delta_{ij} \right\} da_i \, da_j$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \right) da_i \, da_j$$

se define

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \varepsilon_{ij} \, da_i \, da_j$$

en donde ε_{ij} es el tensor de deformación

$$\therefore \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

b) Euleriana $\{x_i\}$

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - da_i da_i$$

como $\quad a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \quad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j$$

usamos que $\quad u_i = x_i - a_i$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$\Rightarrow$

$$ds^2 - ds_0^2 = \left\{ \delta_{ij} - \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} dx_i dx_j$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j$$

analogamente al caso Lagrangiano, el tensor de deformación se define como:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \eta_{ij} dx_i dx_j$$

$$\therefore \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

Cuando las deformaciones son pequeñas los términos cuadráticos son despreciables, el tensor de deformación se reduce al caso infinitesimal (lineal) y las dos representaciones, Euleriana y Lagrangiana, son iguales.

→ Las componentes de ε_{ij}.

Sup. $ds_0 = da_1 \qquad da_2 = da_3 = 0$

y $\qquad E_1 \equiv \dfrac{ds - ds_0}{ds_0}$ extensión unidireccional

por otro lado

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\,\varepsilon_{11}\,da_1^2$$

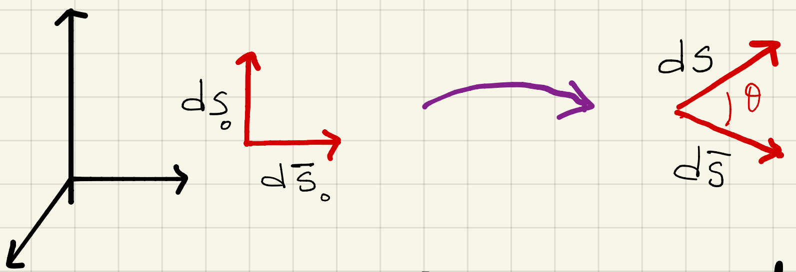
$$\Rightarrow \left((1+E_1)^2 - 1 \right) ds_0^2 = 2\,\varepsilon_{11}\,da_1^2$$

$$\Rightarrow \quad (1+E_1)^2 = 2\varepsilon_{11} + 1$$

$$\therefore \quad E_1 = \sqrt{2\varepsilon_{11} + 1} - 1 \qquad \text{si} \quad \varepsilon_{11} << 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad E_1 \simeq \varepsilon_{11}}$$

Ahora, suponemos dos segmentos de arco: ds y $d\bar{s}$



$$\Rightarrow \quad ds\,d\bar{s}\cos\theta = dx_i\,d\bar{x}_i$$

como $\quad dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}\,da_j$

$$\Rightarrow \quad ds\,d\bar{s}\cos\theta = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\,\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{a}_k}\,da_j\,da_k$$

como $\quad u_i = x_i - a_i \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial x_i}{\partial a_j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial a_j} - \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \quad ds\,d\bar{s}\cos\theta = \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{a}_k} - \delta_{ik}\right)da_j\,d\bar{a}_k$$

$$= \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{a}_k} - \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial \bar{a}_k} + \delta_{jk}\right)da_j\,d\bar{a}_k$$

Como originalmente

$$ds_0 = da_3 \qquad da_1 = da_2 = 0$$

$$\text{y} \quad d\bar{s}_0 = d\bar{a}_2 \qquad d\bar{a}_1 = d\bar{a}_3 = 0$$

y de lo ya calculado:

$$ds = \sqrt{2\varepsilon_{33}+1}\, da_3$$

$$d\bar{s} = \sqrt{2\varepsilon_{22}+1}\, da_2$$

y definimos $\alpha_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = (2\varepsilon_{jk} + \delta_{jk}) \frac{da_j\, d\bar{a}_k}{ds\, d\bar{s}}$$

como $da_3 \neq 0$ y $d\bar{a}_2 \neq 0$ nada más

$$\therefore \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\varepsilon_{32}}{\sqrt{2\varepsilon_{22}+1}\sqrt{2\varepsilon_{33}+1}}$$

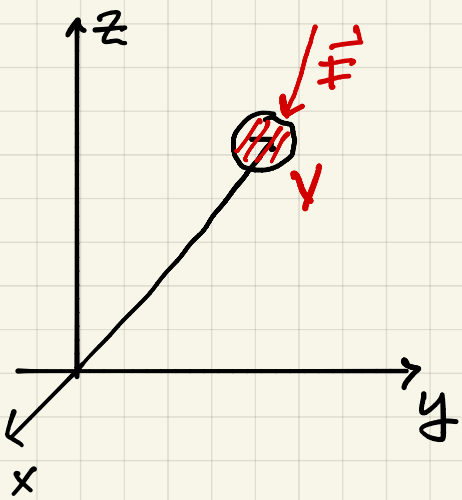
si $\varepsilon_{ij} \ll 1$ $(\alpha \ll 0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{23} \simeq \frac{1}{2}\alpha}$$

∴ los elementos de ε_{ij} en el caso general no son simples para interpretar como en el caso lineal

En el caso no lineal no es posible separar las deformaciones en expansiones mas cortes puros!!

★ Las fuerzas – Dinámica



i) fuerzas Volumétricas

$$\vec{F}_v = \int_V \rho \vec{f}_v \, dv \qquad [\vec{f}_\rho] = \frac{\text{fuerza}}{\text{Vol.}}$$

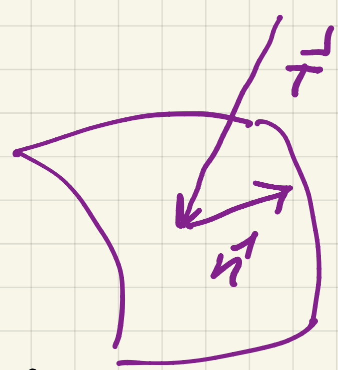
$$\vec{f}_v = \begin{cases} \text{gravedad} \\ \text{fuerzas electromagnéticas} \\ \text{fuerzas ficticias} \end{cases}$$

ii) fuerzas superficiales

$$\vec{F}_s = \int \vec{T} \, ds$$

$\vec{T}$: tracción o vector de esfuerzo.

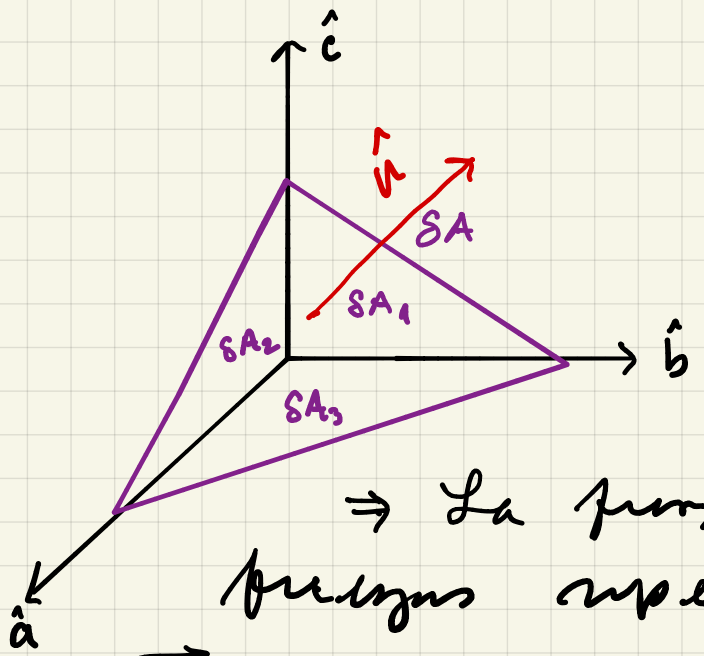
$$[\vec{T}] = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$$



$\vec{T}$ depende de la superficie, i.e

$\vec{T} = \vec{T}(\vec{r}, \hat{u})$: fuerza que tiene el alrededor sobre el elemento de volumen.

$\Rightarrow$ La fuerza que tiene el elemento sobre el alrededor es $\vec{T}(-\hat{u}) = -\vec{T}(\hat{u})$ i.e $\vec{T}$ es una función antisimétrica de $\hat{u}$ por la 3a Ley de Newton.



$$\delta\vec{A}_1 = -\hat{a}\,\delta A_1$$
$$\delta\vec{A}_2 = -\hat{b}\,\delta A_2$$
$$\delta\vec{A}_3 = -\hat{c}\,\delta A_3$$
$$\delta\vec{A} = \hat{u}\,\delta A$$

$\Rightarrow$ La fuerza neta debida a los fuerzas superficiales es:

$$\vec{f} = \vec{T}(\hat{u})\delta A + \vec{T}(-\hat{a})\delta A_1 + \vec{T}(-\hat{b})\delta A_2 + \vec{T}(-\hat{c})\delta A_3$$

usando la antisimetría de $\vec{T}$

y que $\delta A_1 = \hat{a}\cdot\hat{u}\,\delta A$ etc...

$$\vec{f} = T(\hat{u})\delta A - [a_i u_i \vec{T}(\hat{a}) + b_i u_i \vec{T}(\hat{b}) + c_i u_i T(\hat{c})]\delta A$$

ó

$$f_j = T_j(\hat{u})\delta A - u_i[a_i T_j(\hat{a}) + b_i T_j(\hat{b}) + c_i T_j(\hat{c})]\delta A$$

ahora

$$\rho\vec{a}\,\delta V = \vec{f}_v\,\delta V + \vec{f}\,\delta S$$

en donde $\delta S = \delta A + \sum \delta A_i$

si tomamos el límite $\delta V \to 0$ para que la igualdad se satisfaga

$$\Rightarrow \quad \vec{f}\,\delta S = 0 \quad \text{ó} \quad \vec{f} = 0$$

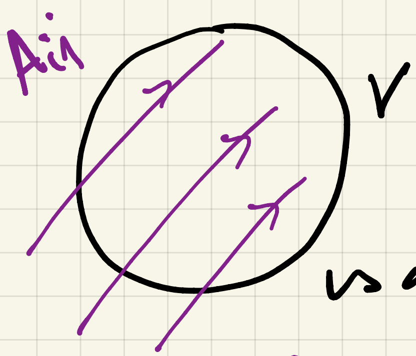
ya que δV va a cero como l^3 y δA como l^2

$$\therefore \quad \vec{T}(\hat{u}) = u_i \left[a_i T_1(\hat{a}) + b_i T_1(\hat{b}) + c_i T_1(\hat{c}) \right]$$

Def. $\tau_{i1} = a_i T_1(\hat{a}) + b_i T_1(\hat{b}) + c_i T_1(\hat{c})$
como el tensor de esfuerzos, pues está definido con el producto directo entre dos vectores.

$$\therefore \quad \vec{T} = \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{u}$$

→ Una alternativa: Teo. de la divergencia



$$\vec{F} = \int \rho \vec{f}\, dV + \int \vec{T} ds$$

para sumar las integrales usamos el Teo. de la div.

i.e, $$\int A_{ij} n_j ds = \int \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} dV$$

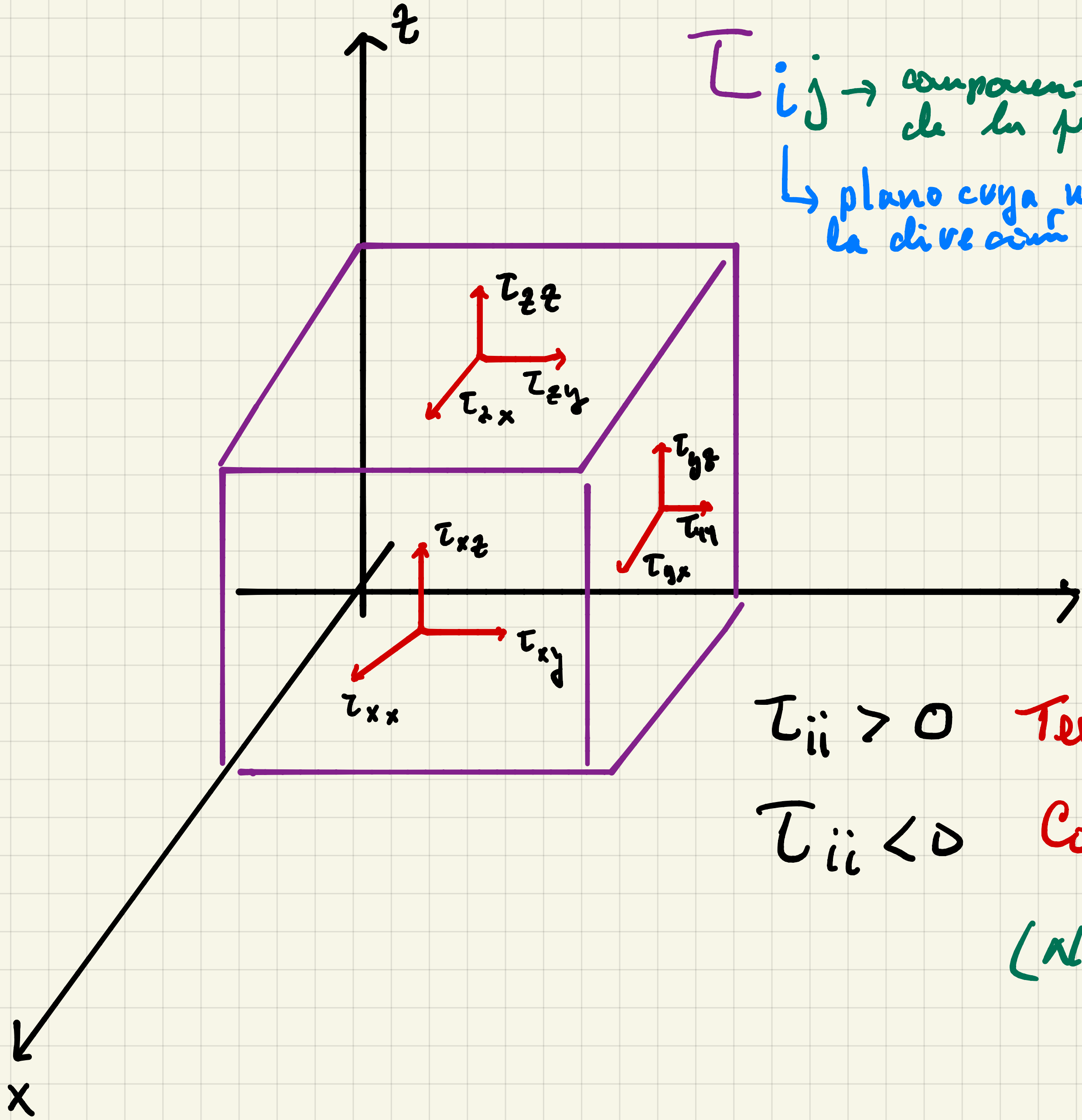
$\Rightarrow \quad T_i = \tau_{ij} u_j$ debe ser tensor de 2º orden

$$\therefore \quad F_i = \int \left(\rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV$$

Es importante notar que para cambiar la integral de superficie a una de volumen y sumar las fuerzas es necesario (y suficiente) que

$$\vec{T} = \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{n} \quad \text{en donde}$$

$\underline{\underline{\tau}}$ es un tensor de 2° orden.



τ_{ij} → j: componente j-ésima de la fuerza
i: plano cuya normal va en la dirección i.

$\tau_{ii} > 0$ Tensiones

$\tau_{ii} < 0$ Compresiones.

(No suma)

– Torcas.

$$m_{ij} = x_i F_j - x_j F_i$$ tensor antisimétrico $\left[\frac{\text{Torca}}{\text{Vol}}\right]$

Ya habíamos encontrado que

$$F_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad [F_i] = \frac{\text{fuerza}}{\text{Volumen}}$$

$$\Rightarrow \quad m_{ij} = x_i \frac{\partial \tau_{j\ell}}{\partial x_\ell} - x_j \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell}$$

integramos respecto al volumen:

$$M_{ij} = \int \left(x_i \frac{\partial \tau_{j\ell}}{\partial x_\ell} - x_j \frac{\partial \tau_{i\ell}}{\partial x_\ell} \right) dV$$

en donde $M_{ij} = \int m_{ij}\, dV$

$\vec{\tau} = M \cdot \hat{n}$ es la torca que actúa sobre el elemento de superficie cuya normal es $\hat{n}$.

Como,

$$x_i \frac{\partial \tau_{jl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}(x_i \tau_{jl}) - \tau_{jl}\delta_{il}$$

$$\Rightarrow \quad M_{ij} = \int \frac{\partial}{\partial x_l}(x_i \tau_{jl} - x_j \tau_{il})\, dV$$

$$- \int \left(\tau_{jl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} - \tau_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \right) dV$$

la 1ª integral se cambia usando teo. de la div.

$$\Rightarrow \quad M_{ij} = \int (x_i \tau_{jl} - x_j \tau_{il})\, n_l\, dS$$

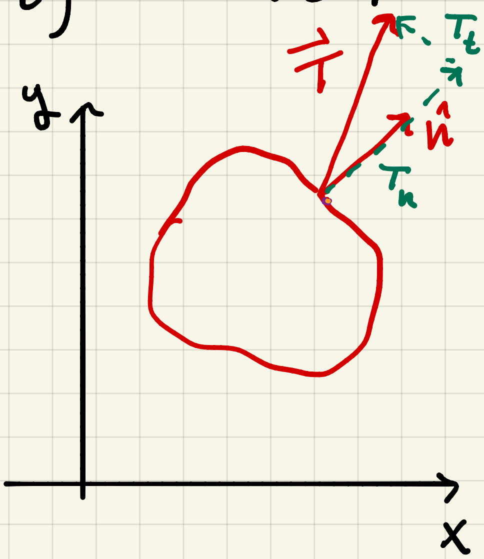
$$- \int (\tau_{ji} - \tau_{ij})\, dV$$

El 1er término son las fuerzas superficiales y el segundo, las fuerzas volumétricas que se deben anular en un fluido isotrópico (sin estructura) $\Longrightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$

El tensor de esfuerzos es simétrico.

☆ La superficie de esfuerzos

i) El vector de esfuerzos



$$\vec{T} = T_n \hat{n} + T_t \hat{t} \qquad \hat{n}\cdot\hat{t} = 0$$

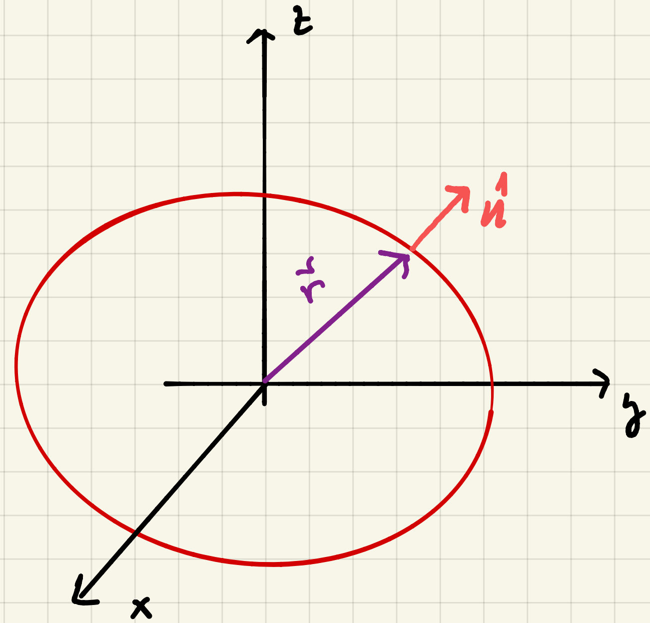
$$T_n = \hat{n}\cdot \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n}$$

$$y \quad T_t \hat{t} = T_n \hat{n} - \vec{T}$$

La componente normal

$T_n = n_i \tau_{ij} n_j$ si escojemos $\hat{n} = \frac{1}{r}(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \quad T_n = \tau_{ij} \frac{x_i x_j}{r^2}$$



Sea:

$$G(x_1, x_2, x_3) = \tau_{ij} x_i x_j$$

$$\Rightarrow \quad G(x_1, x_2, x_3) = \pm k^2$$

sup. de esfuerzos

$$\therefore \quad T_n = \pm \frac{k^2}{r^2}$$

Depende de $1/r^2$

$-$: Compresión

$+$: expansión

→ La superficie de esfuerzos está determinada por:

$$\tau_{ij} x_i x_j = \pm k^2$$

ahora, si hacemos una transformación de coordenadas (de un sistema inercial a otro)

$$\Rightarrow \quad x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{ij}' x_i' x_j' = \pm k$$ puesto que k es un escalar

$$\Rightarrow \quad \tau_{ij} x_i x_j = \tau_{kl}' x_k' x_l'$$

como $$x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_k'} x_k'$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k'} \frac{\partial x_j}{\partial x_l'} x_k' x_l' = \tau_{kl}' x_k' x_l'$$

$$\therefore \quad \tau_{ij}' = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} \tau_{kl}$$

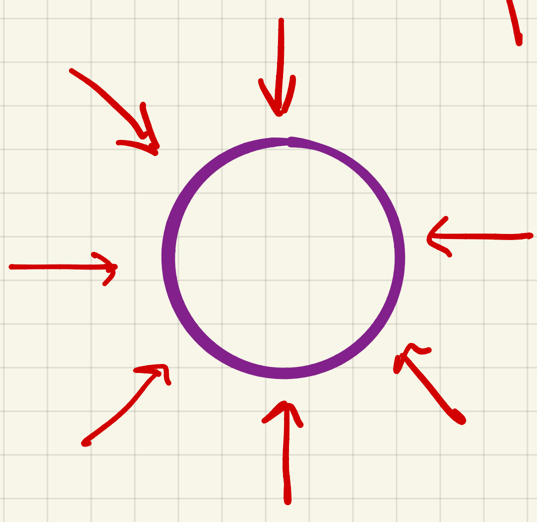
es tensor de 2° orden 2 veces covariante.

En analogía con el tensor de deformación $\underset{\sim}{\tau}$ se puede diagonalizar y tiene valores propios reales, es decir, se resuelve

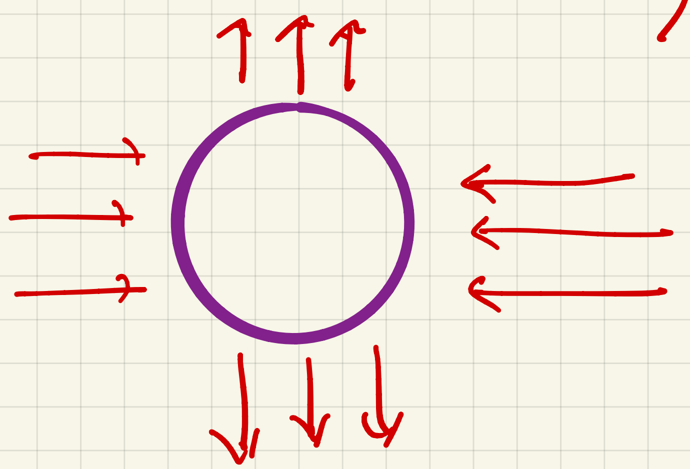
$$\boxed{\det|\tau_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0}$$

y los vec. pr. $\boxed{\tau_{ij}x_j = \lambda x_i}$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{\tau} = \frac{1}{3}\tau_{ll}\delta_{ij} + \begin{pmatrix} \tau_{11} - \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} - \frac{1}{3}\tau_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} - \frac{1}{3}\tau_{ii} \end{pmatrix}$$

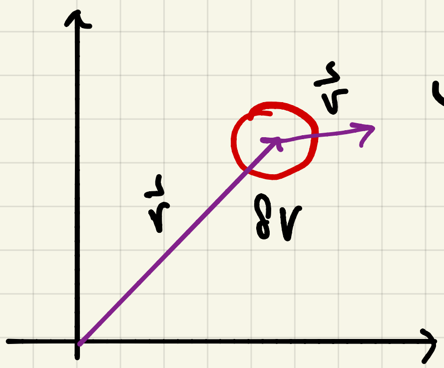


Tens. isotrópico



Tensor sin traza un elemento de la diagonal tiene el signo opuesto a los otros dos.

★ La segunda ley para un medio deformable.



$$\int \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_{\delta V} \rho \vec{f} \, dV + \int_{\delta S} \vec{T} \, dS$$

masa x acel. = f. Vol. + f. sup.

Un cuerpo rígido.

Si $\rho = cte$ y $M = \rho \delta V$

$$\Rightarrow \int \rho \frac{d\vec{r}}{dt} dV = M_T \ddot{\vec{R}} \quad y \quad \int \rho \vec{f} \, dV = \vec{F}_{ext}$$

y $$M_T \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext}$$

La integral de superficie se anula puesto que para deformar un cuerpo rígido se requieren fuerzas sup. infinitas.

★ Ecuaciones de equilibrio.

En el caso en que $\int_{\delta V} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} dV = 0$

$$\Rightarrow \int \rho \vec{f} dV + \int \vec{T} ds = 0$$

como $\vec{T} = \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n}$

$$\Rightarrow \int \rho f_i dV + \int \tau_{ij} n_j ds = 0$$

y usamos el teo. de la div.

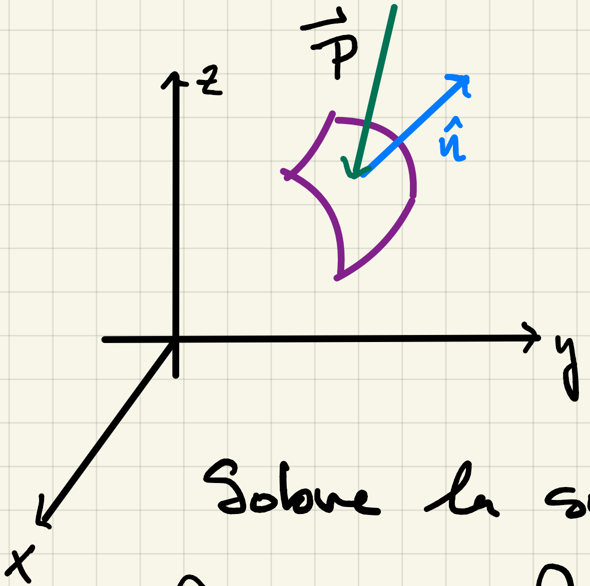
$$\Rightarrow \int \left\{ \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right\} dV = 0$$

como la expresión no depende del volumen

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \vec{f}_i = 0$$

ec. de equilibrio mecánico de un medio elástico.

☆ Condiciones de frontera



$\vec{P}$: fuerza que actúa sobre la superficie $\partial\Omega$

Sobre la superficie $\partial\Omega$

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{P}\, ds}_{\text{fuerza externa aplicada en } \partial\Omega} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{u}\, ds}_{\text{fuerza que hace el fluido sobre el alrededor.}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int (P_i - \tau_{ij} n_j)\, ds = 0$$

$$\therefore \quad \tau_{ij} n_j = P_i \quad \text{en } \partial\Omega$$

ó

$$\underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n} = \vec{P}$$

– Entonces, las ecs. de eq. mecánico para un sólido deformable que ocupa una región Ω

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{T} + \rho \vec{f} = 0$$

Con las condiciones de frontera

$$\underset{\sim}{T} \cdot \hat{u} = \vec{P} \quad \text{en } \partial\Omega$$

en índices

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} + \rho f_i = 0$$

$$T_{ij} u_j = P_i \quad \text{en } \partial\Omega$$

sistema de 3 ecs. diferenciales con 6 incognitas.

Para resolver el problema se necesitan 3 ecuaciones más ¡¡

A partir de las condiciones de frontera se puede encontrar información sobre el promedio de $\underset{\sim}{T}$.

- El promedio de $\underset{\sim}{\tau}$

Sup. $\vec{f} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l} = 0$

y multiplicamos por x_j e integramos en V

$$\Rightarrow \int x_j \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_l} dV = \int \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j \tau_{il}) dV - \int \tau_{il} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} dV$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j \tau_{il}) dV - \int \tau_{il} \delta_{lj} dV = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\tau}_{ij} = \frac{1}{V} \int \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j \tau_{il}) dV$$

Cambiamos la integral por una de superficie y usamos la CoFo

$$\overline{\tau}_{ij} = \frac{1}{2V} \int (x_i P_j + P_i x_j) dV$$

donde $\overline{\tau}_{ij} = \dfrac{1}{V} \displaystyle\int \tau_{ij} dV$

— Termoelasticidad.

La energía interna, (1ª ley)

$$dU = Tds - pdV \Rightarrow U = U(s,V)$$

$$\Rightarrow \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \quad y \quad P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

$U = U(S,V)$ ec. fundamental.

$$\left.\begin{aligned} T &= T(S,V) \\ P &= P(S,V) \end{aligned}\right\}$$ Ecs. de estado en la representación de la energía.

— Los potenciales termodinámicos.

i) Energía libre de Helmholtz

$$F = U - TS$$

$$\Rightarrow \quad dF = dU - Tds - sdT$$

$$\therefore \quad dF = -sdT - pdV$$

en donde se usó la 1ª ley

$\Rightarrow \quad F = F(T, V)$ ec. fundamental

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \qquad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

ecs. de estado en la rep. de la energía libre.

ii) Entalpía

$$H = U + pV$$

$\Rightarrow \quad H = H(S, P)$ ec. fundamental

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P \qquad V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S$$

ecs. de estado en la rep. de la entalpía.

iii) Energía libre de Gibbs.

$$G = U - TS + pV \Rightarrow G = G(T, P)$$

y $\quad S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_S$

en la representación de la energía libre de Gibbs.

✱ El trabajo elástico.

$\delta R = -\vec{F} \cdot \delta \vec{u}$ $\quad \vec{u}$: Campo de desplazamientos

δR: Trabajo echo por fuerzas sup. en el volumen dV

$\Rightarrow$ $$\delta W = \int \delta R \, dV$$ es el trabajo hecho por fuerzas sup.

$\Rightarrow$ $$\delta W = -\int \vec{F} \cdot \delta \vec{u} \, dV \qquad \vec{F} = \nabla \cdot \underset{\sim}{\tau}$$

$\Rightarrow$ $$\delta W = -\int \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV$$

ahora,

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \delta u_i) - \tau_{ij} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

el último término lo simetrizamos.

$$\Rightarrow \delta W = -\int \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}\,\delta u_i)\,dV$$

$$+\int \tau_{ij}\,\delta\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}dV$$

$$\delta W = \int \tau_{ij}\,\delta e_{ji}\,dV - \int \delta u_i\,\tau_{ij}\,n_j\,dS$$

en el lím $V \to \infty$ la integral de sup. se anula

$$\Rightarrow \quad \delta W = \int \tau_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV$$

$$\therefore \quad \delta R = \underset{\sim}{\tau} : \delta \underset{\sim}{e}$$

es el trabajo por unidad de volumen debido a fuerzas superficiales.

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{E} = T\,ds + \underset{\sim}{\tau} : d\underset{\sim}{e}$$

$\mathcal{E}$ y s : energía interna y entropía por unidad de volumen.

★ Todo esto es válido si se satisface la hipótesis de equilibrio local.

entonces,

$$\varepsilon = \varepsilon(s, \{e_{ij}\}) \quad \text{ec. fundamental}$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\right)_{\{e_{ij}\}} \\ \tau_{ij} &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial e_{ij}}\right)_{\{e_{kl}\}, s} \end{aligned}\right\} \text{ecs. de estado.}$$

★ Trabajo elástico.

En una compresión isotrópica

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \text{y} \quad e_{ij} = \frac{1}{3} e_{ll}\,\delta_{ij}$$

↳ presión.

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{\tau} : d\underset{\sim}{e} = -p\,\delta_{ij}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{3}\,\delta e_{ll}$$

$$= -p\,\delta e_{ll}$$ y sabemos

que la traza es cambio de volumen

$$\therefore \quad \underset{\sim}{\tau} : d\underset{\sim}{e} = -P\,dv$$ (en donde el vol. antes de la def. es uno)

★ La energía libre de Hemholtz elástica.

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS$$ energía libre por unidad de volumen

$$d\mathcal{F} = d\mathcal{E} - Tds - s\,dT$$

$$= \tau_{ij}\, de_{ij} - s\,dT$$

$$\therefore \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(T, \{e_{ij}\})$$

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_{ij}}\right)_{\{e_{kl}\}, S}$$

$$S = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_{\{e_{ij}\}}$$

Como $e_{ij} \ll 1$ podemos hacer un desarrollo en Taylor a $T = cte$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(T_0, \{e_{ij}\}) = \mathcal{F}(T_0) + \alpha_{kl} e_{kl}$$
$$+ \beta_{klmn} e_{kl} e_{mn} + \mathcal{O}(\text{cub.})$$

- El tensor de esfuerzos.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ell_{ij}}\right)_T = \alpha_{kl}\frac{\partial \ell_{kl}}{\partial \ell_{ij}} + \beta_{klmn}\,\ell_{kl}\frac{\partial \ell_{mn}}{\partial \ell_{ij}}$$

$$+ \beta_{klmn}\frac{\partial \ell_{kl}}{\partial \ell_{ij}}\,\ell_{mn}$$

ya que $\dfrac{\partial \ell_{kl}}{\partial \ell_{ij}} = \delta_{ki}\,\delta_{lj}$

$$\Rightarrow \quad \tau_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{klij}\,\ell_{kl} + \beta_{ijkl}\,\ell_{kl}$$

si no hay deformación $\Rightarrow \tau_{ij} = 0$

$\therefore \quad \alpha_{ij} = 0$ a $T = cte.$

$$\therefore \quad F = F(T_0) + \beta_{klmn}\,\ell_{kl}\,\ell_{mn}$$

En esta aproximación el material elástico se caracteriza con 81 coeficientes independientes.

→ Deformación homogénea:

exp. isotrópica + cortes puros

→ Isotropía.

Cuando hay invariancia frente a rotaciones, isotropía espacial,

$$F = F(T_0) + \frac{1}{2} K\, e_{ll}^2 + \lambda\, e_{ln} e_{ln}$$

K y λ : Coeficientes de Lamé

i) Compresión isotrópica ($e_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

$$F = F(T_0) + \frac{1}{2} K\, e_{ll}^2$$

para que F sea mínimo a def. cero $\quad K > 0$

ii) Corte puro $\frac{\delta V}{V} = 0$

$$F = F(T_0) + \lambda\, e_{ln} e_{ln}$$

para que tenga un mínimo a deformación cero

$$\lambda > 0$$

★ Prop.

$$F = F(T_0) + \frac{1}{2} K e_{ll}^2 + \mu \underbrace{\left(e_{kn} - \frac{1}{3} e_{ll}\delta_{kn}\right)^2}_{\text{tensor sin traza}}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Calculamos dF

$$dF = K e_{ll} \frac{\partial e_{ll}}{\partial e_{ij}} de_{ij} +$$

$$2\mu\left(e_{kn} - \frac{1}{3} e_{ll}\delta_{kn}\right)\left(\frac{\partial e_{kn}}{\partial e_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial e_{ll}}{\partial e_{ij}}\delta_{kn}\right) de_{ij}$$

pero $\delta_{kn}\left(e_{kn} - \frac{1}{3} e_{ll}\delta_{kn}\right) = 0$

ya que $\delta_{kn} e_{kn} = e_{nn}$ y $\delta_{kn}\delta_{kn} = 3$

$$\therefore dF = \left(K e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{ll}\right)\right) de_{ij}$$

$\therefore$

$$\sigma_{ij} = K e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{ll}\right)$$

Tensor de esfuerzos de Hooke.

i) Compresión isotrópica.

$$e_{ij} = \frac{1}{3} e \delta_{ij} \quad y \quad e \equiv \frac{\delta V}{V}$$

$\Rightarrow \quad \tau_{ij} = K e \delta_{ij}$ en una compresión isotrópica $\quad \tau_{ij} = - P \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \quad K = - \frac{P}{e}$$

ahora, $e = \frac{\delta V}{V} \quad \therefore \quad K = V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$

que es el inverso de la compresibilidad isotérmica.

ii) si $\frac{\delta V}{V} = 0$

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

$\therefore \mu$: rigidez a la torsión.

★ Extensión simple

De los condiciones de frontera:

$$P_i = \tau_{ij} n_j \qquad \hat{n} = \hat{n}$$

$$\Rightarrow \qquad \tau_{zz} = P \quad \text{en las tapas}$$

Como el material es homogéneo τ_{zz} es prácticamente constante en todo el material.

Calculamos las deformaciones:

$$e_{ij} = \frac{1}{9K} \tau_{ll} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{ll} \right)$$

$$\Rightarrow \qquad e_{xx} = e_{yy} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) P$$

$$y \qquad e_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) P$$

El módulo de Young se define como

$$e_{zz} = \frac{P}{E}$$

$$\therefore \qquad E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}$$

De manera similar, se define el coeficiente de Poisson como

$$e_{xx} = -\sigma e_{zz}$$

i.e, σ es la contracción relativa en la dirección transversal.

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2}\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}$$

dado que K y $\mu > 0$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \sigma \leq 1/2$$ (en la práctica $0 \leq \sigma \leq 1/2$)

por lo tanto:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad y \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

Con estas expresiones podemos reescribir a la energía libre y a la ley de Hooke generalizada i.e.

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(e_{ij}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} e_{ll}^2\right)$$

y

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} e_{ll}\,\delta_{ij}\right)$$

y la inversa

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+\sigma)\tau_{ij} - \sigma\tau_{ll}\,\delta_{ij}\right)$$

★ Extensión unilateral $e_{zz} = e$
cero los demás.

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\, e$$

y

$$\tau_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\, e$$

si la fuerza compresora es $\tau_{zz} = P$ (<0 comp.)

$$\Rightarrow \quad e = \underbrace{\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}}_{\text{coef. de compresión unilateral}} P \quad \text{y} \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = P\frac{\sigma}{1-\sigma}$$

* La energía libre como función de la temperatura.

$$F(T,\{e_{ij}\}) = F_0 - K\alpha e_{ll}(T-T_0) + \frac{1}{2}K e_{ll}^2 + \mu\left(e_{kn} - \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{kn}\right)^2$$

si $T - T_0 < 1$

entonces el tensor de esfuerzos es:

$$\tau_{ij} = -\alpha K(T-T_0)\delta_{ij} + K e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij}\right)$$

En una expansión por un cambio en la temperatura los esfuerzos son cero, i.e.,

$$0 = -\alpha(T-T_0)\delta_{ij} + K e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij}\right)$$

los únicos términos diferentes de cero son para $i=j$

$$\Rightarrow \quad 0 = -K\alpha(T-T_0)\delta_{ii} + K e_{\ell\ell}\delta_{ii}$$

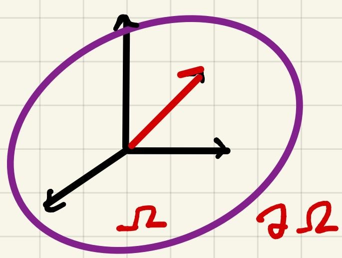
$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{e_{\ell\ell}}{(T-T_0)} \quad \text{como} \quad e_{\ell\ell} = \frac{\delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$: coeficiente de expansión térmica

✱ Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos.

i) La segunda ley de Newton

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\tau} + \rho\vec{f} = 0$$



con las condiciones de frontera

$$\vec{P} = \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n} \quad \text{en } \partial\Omega$$

y encontramos que:

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} e_{\ell\ell}\,\delta_{ij}\right)$$

y como $\quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x_j \partial x_\ell}\delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right)\frac{\partial u_\ell}{\partial x_i \partial x_\ell}\right)$$

$$= \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2(1-2\sigma)}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_i \partial x_\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial u_\ell}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) + \rho f_i = 0$$

En notación vectorial:

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \frac{2(1+\sigma)}{E}\vec{f} = 0$$

mas condiciones de frontera

$$\vec{P} = \underset{\sim}{\tau}\cdot\hat{n} \quad \text{en } \partial\Omega$$

Utilizando la identidad vec.

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \nabla^2\vec{u} + \nabla\times(\nabla\times\vec{u})$$

$$\therefore\ \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = -\rho\vec{f}\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

Si no hay fuerzas externas

$$(1+2\sigma)\nabla^2\vec{u} + \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$$

Con. de frontera $\vec{P} = \underset{\sim}{\tau}\cdot\hat{u}$

Si tomamos la div.

$$\Rightarrow\ (1+2\sigma)\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) + \nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$$

i.e, $\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$

i.e $\nabla\cdot\vec{u}$ satisface la ec. de Laplace.

Si tomamos el laplaciano de la ec. de equilibrio

$$(1+2\sigma)\nabla^4\vec{u} + \nabla(\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u})) = 0$$

como $\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$

$$\therefore \quad \nabla^4\vec{u} = 0$$

$\vec{u}$ es vector bi-armónico. Esta ecuación es válida para el caso de campos externos constantes; como el caso gravitacional.

Nota: Esto no implica que la solución general sea un vector biarmónico, puesto que $\vec{u}$ debe satisfacer también la ec. de equilibrio que es de orden menor. Sin embargo, la solución se puede expresar como combinación de derivadas de un vec. armónico.

★ Cuando hay variaciones en la Temp.

como

$$\tau_{ij} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}(T-T_0) + \tau_{ij}^{iso}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\nabla T + \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij}^{iso}$$

por lo que la ec. de equilibrio es:

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = \alpha\nabla T$$

+ Con. de frontera.

★ Deformación Plana

$$u_z = 0 \quad y \quad u_i = u_i(x,y) \quad i=1,2.$$

como $$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0$$

usando la ley de Hooke

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} e_{ll}\, \delta_{ij} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{zz} \neq 0 \quad \text{pues} \quad u_z = 0$$

de las ecs. de eq. $\nabla \cdot \underset{\sim}{\tau} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0$$

ya que nada depende de z.

Sol: $\quad \tau_{xx} = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \; ; \quad \tau_{yy} = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$

y $\quad \tau_{xy} = - \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$

con $\chi = \chi(x,y)$

como $\tau_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} e_{ll}\,\delta_{ij} \right)$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xx} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{xx} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(e_{xx}+e_{yy}) \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1+\sigma}\left(e_{yy} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(e_{xx}+e_{yy}) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xx} + \tau_{yy} = \frac{E}{1+\sigma}\left[1 + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\right](e_{xx}+e_{yy})$$

i.e, $\tau_{xx}+\tau_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(e_{xx}+e_{yy})$

Por otro lado

$$\tau_{xx}+\tau_{yy} = \nabla^2 \chi \quad \text{y} \quad e_{xx}+e_{yy} = \nabla\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\nabla\cdot\vec{u} = \nabla^2\chi$$ Tomamos el ∇^2

$$\Rightarrow \quad \nabla^4\chi = 0$$ ya que

$$\nabla^2(\nabla\cdot\vec{u}) = 0$$

Para calcular τ_{zz} se usa la Ley de Hooke,

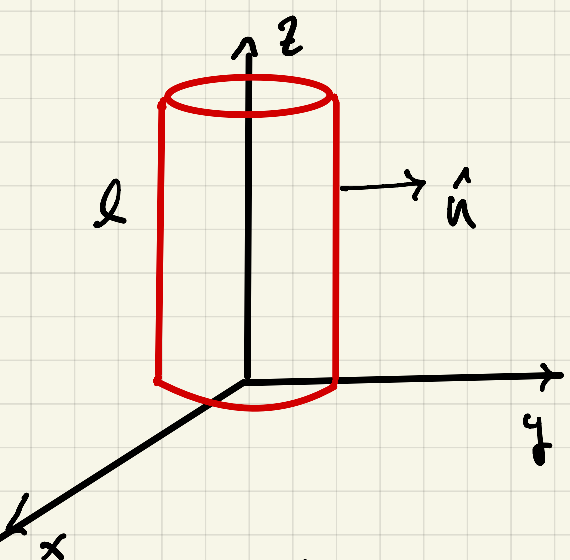
i.e. $$\tau_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(e_{xx} + e_{yy})$$

ó $$\tau_{zz} = \sigma(\tau_{xx} + \tau_{yy})$$

$$\therefore \quad \tau_{zz} = \sigma \nabla^2 \chi$$

χ: función de tensiones.

* Ejemplo. Una varilla en el campo gravitacional.



CoFo: $\tau_{ij} n_j = P_i$

Como solo hay fuerza sup. aplicada en $z=0$

$\Rightarrow$ $\tau_{ij} = 0$ exepto τ_{zz} que se debe anular en $z = l$.

de las ecs. de eq.

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad \text{con} \quad \tau_{zz}(\ell) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{zz} = \rho g z + A$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \rho g \ell + A \qquad \therefore \qquad A = -\rho g \ell$$

$$y \qquad \tau_{zz} = \rho g (z - \ell)$$

Ahora calculamos $\underset{\sim}{e}$

i.e., $$e_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+\sigma)\tau_{ij} - \sigma \tau_{\ell\ell}\delta_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\sigma}{E}\tau_{zz}$$

$$y \quad e_{zz} = \frac{1}{E}\tau_{zz}$$

$$\Rightarrow \quad e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\sigma}{E}\rho g (z - \ell)$$

$$y \qquad e_{zz} = \frac{1}{E}\rho g (z - \ell)$$

$$e_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

para encontrar $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z) \Rightarrow u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z)\, x + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z) \Rightarrow u_y = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z)\, y + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\rho g \frac{(l-z)}{E} \Rightarrow u_z = \frac{1}{2E} \rho g (l-z)^2 + f_3(x, y)$$

De las componentes fuera de la diagonal $e_{12} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{i.e,} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

en vista que el cilindro no se rota $\omega_{12} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\therefore \quad f_1 = f_1(z)$$

$$y \quad f_2 = f_2(z)$$

$$e_{13} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sigma}{E}\rho g x + \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = cte \quad \Rightarrow \quad f_1(z) = A_1 z + u_x^0$$

$$e_{23} = 0$$

$$-\frac{\sigma}{E}\rho g y + \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial y}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = cte \quad \Rightarrow \quad f_2(z) = A_2 z + u_y^0$$

i.e.,

$$-\frac{\sigma}{E}\rho g x + A_1 = -\frac{\partial f_3}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad f_3(x,y) = \frac{\sigma}{2E}\rho g x^2 - A_1 x + h(y)$$

$$-\frac{\sigma}{E}\rho g y + B_2 = -\frac{\partial f_3}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad f_3(x,y) = \frac{\sigma}{2E}\rho g y^2 - A_2 y + g(x)$$

$$\therefore \quad f_3(x,y) = \frac{\sigma}{2E}\rho g(x^2+y^2) - A_1 x - A_2 y + u_z^0$$

$$u_x = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)x + A_1 z + u_x^0$$

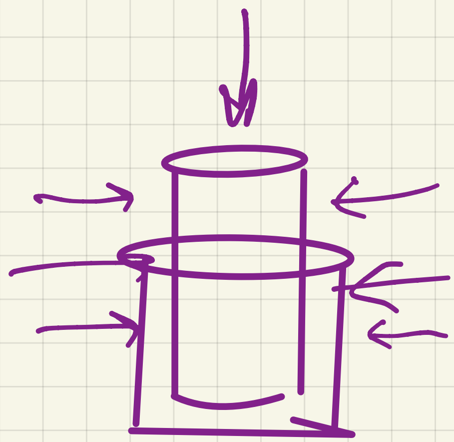
$$u_y = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)y + A_2 z + u_y^0$$

$$u_z = \frac{\rho g}{2E}\left((l-z)^2 + \sigma(x^2+y^2)\right) - A_1 x - A_2 y + u_z^0$$

Como los ptos sobre el eje $(0,0,z)$ contraen, en particular $\vec{u}(0,0,0)=0$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = u_x^0 = u_y^0 = 0$$

y $u_z^0 = -\dfrac{\rho g l^2}{2E}$



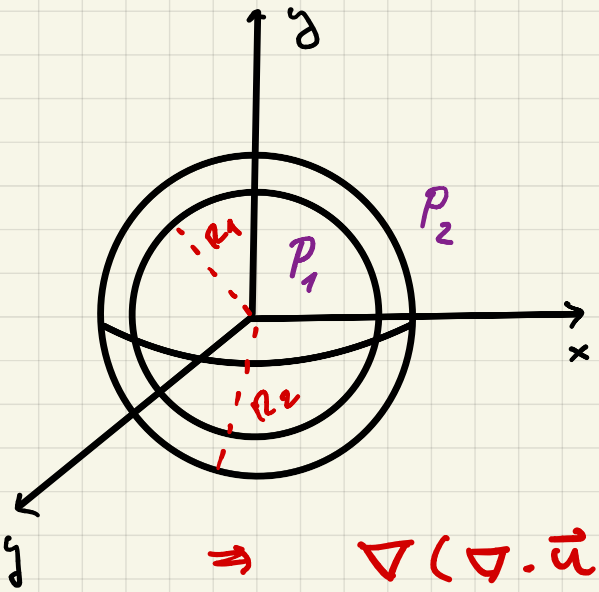
$$\therefore \quad u_x = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)x$$

$$u_y = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)y$$

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E}\left(l^2 - (l-z)^2 + \sigma(x^2+y^2)\right)$$

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\rho g}{E}(1-2\sigma)(z-l)$$

→ Un cascarón esférico sometido a una presión interna P_1 y una externa P_2.



i) Simetrías.

$$\vec{u} = (u(r), 0, 0)$$

$\nabla \times \vec{u} = 0$ por ser compresión isotrópica

$$\Rightarrow \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \quad \text{(ec. de equilibrio)}$$

C.F. $\vec{P} = \underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n} \qquad \hat{n} = \hat{r}$

$$\Rightarrow \quad \tau_{rr}\Big|_{R_1} = -P_1 \quad \text{y} \quad \tau_{rr}\Big|_{R_2} = -P_2$$

En coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u) = cte = 3a$$

integramos:

$$u(r) = ar + \frac{b}{r^2}$$

Para las condiciones de frontera

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \Rightarrow e_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \Rightarrow e_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^3}$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r} \Rightarrow e_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$$

y calculamos los esfuerzos:

$$\tau_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left((1-\sigma)e_{rr} + 2\sigma e_{\theta\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{rr} = \frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}$$

de las C.F.

$$\frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{R_1^3} = -P_1$$

$$\frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{R_2^3} = -P_1$$

$$\therefore \quad a = \frac{P_1R_1^3 - P_2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\,\frac{1-2\sigma}{E}$$

$$b = \frac{R_1^3R_2^3(P_1-P_2)}{R_2^3 - R_1^3}\,\frac{1+2\sigma}{E}$$

* Casos límite

$P_2 = 0$; Sólo hay presión interna

$$\Rightarrow \quad \tau_{rr} = \frac{P_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = \frac{P_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 + \frac{R_2^3}{r^3}\right)$$

con $R_1 \leq r \leq R_2$

Si la cascara es delgada:

$$h = R_2 - R_1 << R$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{P_1 R^2 (1-\sigma)}{2Eh}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = \frac{PR}{2h} \quad y \quad \overline{\tau}_{rr} = \frac{P}{2}$$ prom. sobre la cascara

→ Un medio elástico infinito con una cavidad hueca

$$R_1 = R \quad y \quad R_2 \longrightarrow \infty$$

$$P_1 = 0 \quad y \quad P_2 = P$$

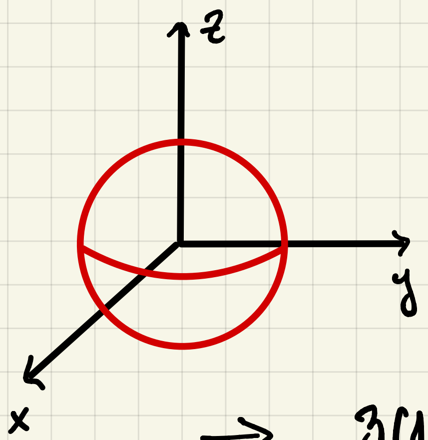
$$\Rightarrow \quad \tau_{rr} = -P\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = -P\left(1 + \frac{R^3}{r^3}\right)$$

en $r = R$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = -\frac{3}{2}P \quad (> -P)$$

* Deformación de una esfera por calentamiento.



$$T = T(r) \quad \text{y por simetría}$$

$$\vec{u} = (u(r), 0, 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{u} = 0 \quad (\text{no hay cortes})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \alpha \nabla T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u)\right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{dT}{dr}$$

integrando,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 u\right) = \frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma)} r^2 T(r) + A$$

$$\Rightarrow \quad u(r) = \frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma) r^2} \int_0^r r^2 T(r)\, dr + \frac{1}{3} A r$$

y se utilizó que $u(0) = 0$.

Para ajustar condiciones de frontera calculamos $\underset{\sim}{e}$ y $\underset{\sim}{\Sigma}$

$$\Rightarrow \quad e_{rr} = \frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma)} \left[T(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r r^2 T(r)\, dr + \frac{1}{3} A \right.$$

$$e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma) r^3} \int_0^r r^2 T(r)\, dr + \frac{1}{3} A$$

ahora,

$$\Sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left((1-\sigma) e_{rr} + 2\sigma e_{\theta\theta} \right)$$

Como es una expansión térmica

$$\Sigma_{rr} = 0 \quad \text{en} \quad r = R$$

$$\Rightarrow \quad (1-\sigma)\, e_{rr}\Big|_{r=R} + 2\sigma\, e_{\theta\theta}\Big|_{r=R} = 0$$

de donde

$$A = \frac{\alpha(1+\sigma)}{1+2\sigma}\left[\frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma}\,\frac{1}{R^3}\int_0^R r^2\, T(r)\, dr\right]$$

en donde se asumió que $T(R) = 0$.

$$\therefore \quad u(r) = \frac{\alpha(1+\sigma)}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r^3}\int_0^r T(r)\, r^2\, dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+2\sigma}\int_0^R r^2\, T(r)\, dr\right\}$$

* La integral general de la ec. de equilibrio.

Si $\vec{f}$ es un vector biarmónico, i.e,

$$\nabla^4 \vec{f} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{u} = \nabla^2 \vec{f} + A\,\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$$

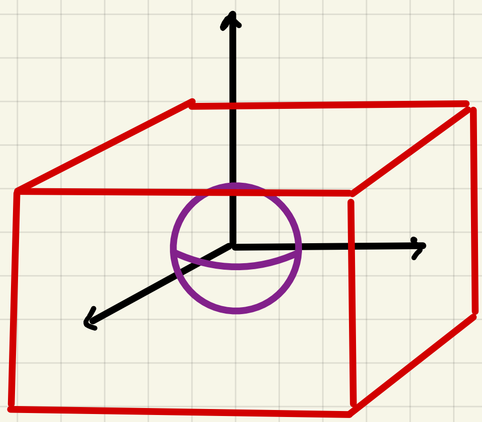
Sust. en la ec. de equilibrio,

$$\Rightarrow \quad (1-2\sigma)\nabla^4\vec{f} + (2(1-\sigma)A+1)\,\nabla(\nabla\cdot\nabla^2\vec{f}) = 0$$

Como $\nabla^4\vec{f} = 0 \Rightarrow (2(1-\sigma)A+1)\,\nabla(\nabla\cdot\nabla^2\vec{f}) = 0$

i.e, $A = -\dfrac{1}{2(1-\sigma)}$ y $\vec{u} = \nabla^2\vec{f} - \dfrac{1}{2(1-\sigma)}\nabla(\nabla\cdot\vec{f})$

Una cavidad esférica



El cuerpo sufre una deformación homogénea (caso constante)

sea $\tau_{ij}^{(0)}$ el tensor de esfuerzos sin cavidad. Si solo hay cortes $\tau_{ii}^{(0)} = 0$.

Sol. $\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)}$

↳ Vec. sin cavidad

Con $\vec{u}^{(1)} \to 0$ si $r \to \infty$

Prop.

$$\vec{u}^{(1)} = A\,\tau_{ij}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} + B\,\tau_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$+ C\,\tau_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\, r$$

puesto que r y $\frac{1}{r}$ son soluciones a la ec. biarmónica

Sust. en la ec. de equilibrio

$$\Rightarrow$$

$$\left(2(1-2\sigma)C+(A+2C)\right)\tau^{(0)}_{kl}\frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}\frac{1}{r}=0$$

$$\therefore \qquad A=-4(1-\sigma)C.$$

De las condiciones de frontera

$$(\tau^{(0)}_{ij}+\tau^{(1)}_{ij})n_j=0 \qquad \hat{n}=\hat{r}$$

i.e,

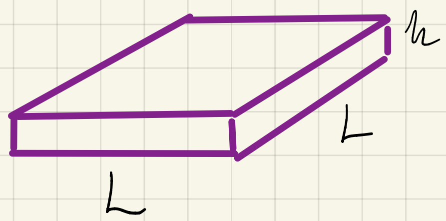
$$\tau_{\theta r}^{(0)}+\tau_{\theta r}^{(1)}=0$$

$$\tau_{\varphi r}^{(0)}+\tau_{\varphi r}^{(1)}=0 \qquad \text{en} \quad r=R$$

$$\Rightarrow \qquad B=\frac{CR^2}{5} \qquad y \qquad C=\frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}$$

Para considerar una deformación general, una deformación isotrópica y la deformación de corte, utilizamos la linealidad de la ec. de equilibrio y el principio de superposición.

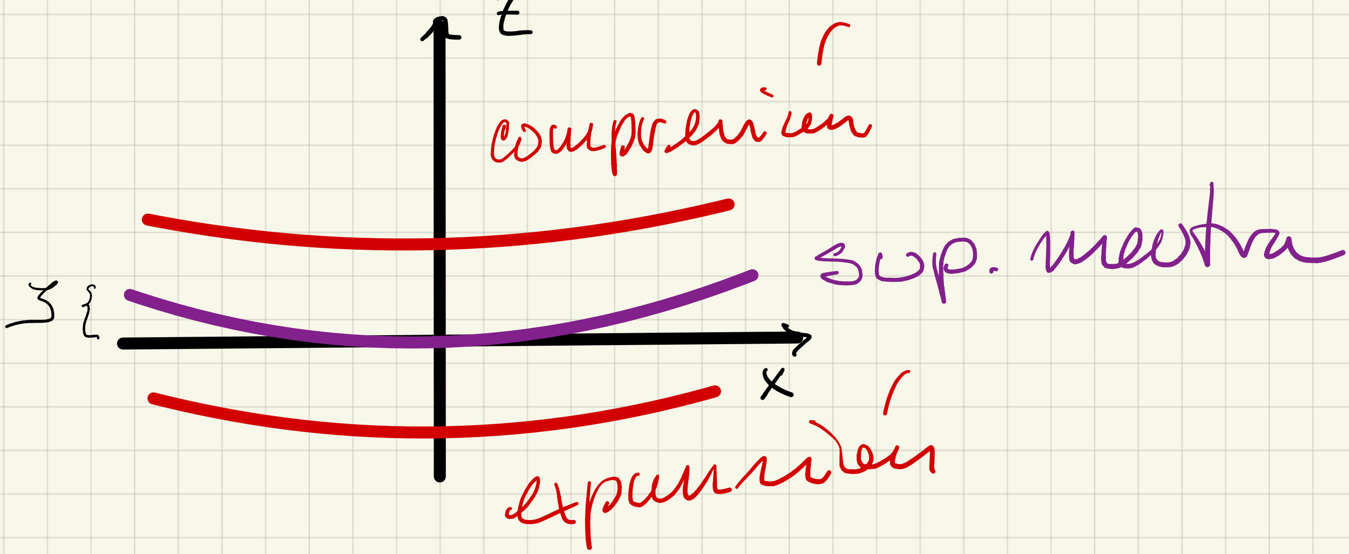
✱ Equilibrio de placas



i) $h \ll L$

ii) $|\vec{u}|$ es pequeño $< h$

✱) Placas combadas



Buscamos calcular la energía libre, i.e,

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(e_{ij}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\, e_{ll}^2\right)$$

Sobre la sup. neutra:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0 \quad \text{y} \quad u_z^{(0)} = \zeta(x,y)$$

a 1er orden en ζ.

Si la placa es delgada, las fuerzas aplicadas son pequeñas respecto a los esfuerzos internos, i.e,

$$\tau_{ij} n_j \simeq 0 \quad \text{en las sup. de la placa}$$

Si la placa está ligeramente curvada
$\hat{n} = \hat{n}$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0 \quad \text{sobre la sup.}$$

Como la placa es delgada y no hay fuerzas de cuerpo

$$\tau_{iz} = 0 \quad \text{en todos lados.}$$

De la ley de Hooke generalizada

$$\tau_{zx} = \frac{E}{1+\sigma} e_{zx} \; ; \; \tau_{zy} = \frac{E}{1+\sigma} e_{zy}$$

$$y \quad \tau_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left\{ (1-\sigma) e_{zz} + \sigma (e_{xx} + e_{yy}) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$y \quad e_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (e_{xx} + e_{yy})$$

a 1^{er} orden en ζ

$$u_z = \zeta + O(\zeta^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

integramos:

$$\Rightarrow \quad u_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} z \quad y \quad u_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} z$$

que satisfacen que $u_x = u_y = 0$ en $z = 0$.
Como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e_{xx} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} z \; ; \quad e_{yy} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} z$$

$$e_{zz} = \frac{\sigma z}{1-\sigma}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

$\therefore$

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right]\right]$$

energía libre / Vol.

La energía libre de la placa:

$$F_{pl} = \int F \, dV$$

$\therefore$

$$F_{pl} = \frac{E h^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left\{ (\nabla^2 \zeta)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx\,dy$$

$dx\,dy$: elemento de sup. no deformado (esto sólo es válido para deformaciones pequeñas).

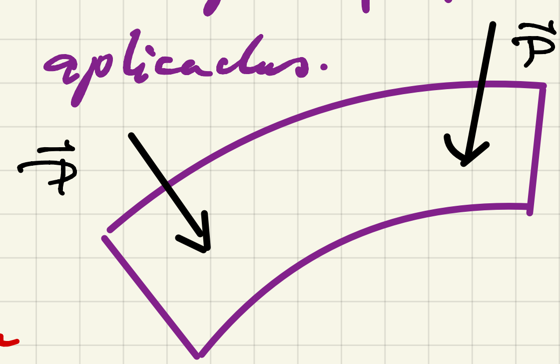
En vista de que todo depende de "x" y "y" el problema se reduce a estudiar la sup. de deformación.

En el estado de equilibrio:

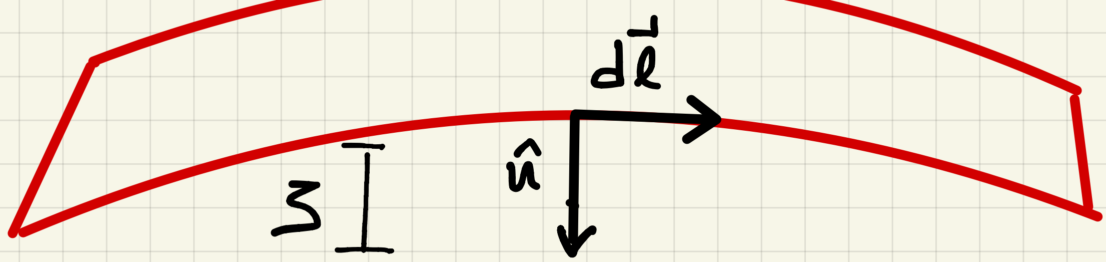
$$\delta F_{pl} - \delta U = 0$$ en donde

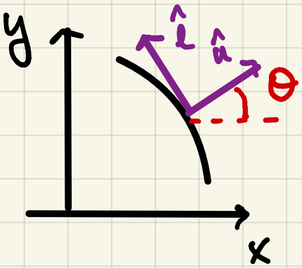
δU es el cambio en la energía potencial debida fuerzas externas aplicadas.

$$\Rightarrow \quad \delta U = \int \underbrace{P \, \delta \zeta}_{\text{Trabajo / área}} \, df$$



P es la fuerza externa sup.





Al efectuar la variación la ec. $\delta F_{pe} - \delta U = 0$

$$\int \left\{ \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)} \nabla^4 \zeta - P \right\} \delta \zeta \, df \; -$$

$$\oint \delta \zeta \, dl \left[\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \nabla^2 \zeta + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} \right] \; +$$

$$\oint \frac{\partial}{\partial n} \delta \zeta \, dl \left\{ \nabla^2 \zeta + (1-2\sigma) \left(2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right\} = 0$$

Sobre la superficie neutra $\delta \zeta \neq 0$ en otro caso no habría deformación

$$\Rightarrow \quad \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)} \nabla^4 \zeta - P = 0$$

$\hookrightarrow$ rigidez a la flexión

Las condiciones a la frontera se obtienen igualando a cero las integrales de línea, de manera independiente ya que $\delta\zeta$ y $\frac{\partial}{\partial n}\delta\zeta$ son independientes.

Si $\delta\zeta$ y $\frac{\partial}{\partial n}\delta\zeta$ son diferentes de cero

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \hat{n}}\nabla^2\zeta + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right.$$

$$\left. + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\} = 0$$

y

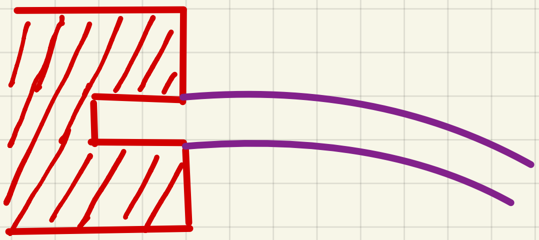
$$\nabla^2\zeta + (1-2\sigma)\left(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

ó $\left.\begin{aligned} \delta\zeta &= 0 \\ \delta\frac{\partial\zeta}{\partial\hat{n}} &= 0\end{aligned}\right\}$ y combinaciones.

* Algunos ejemplos simples.

i) El borde está empotrado.



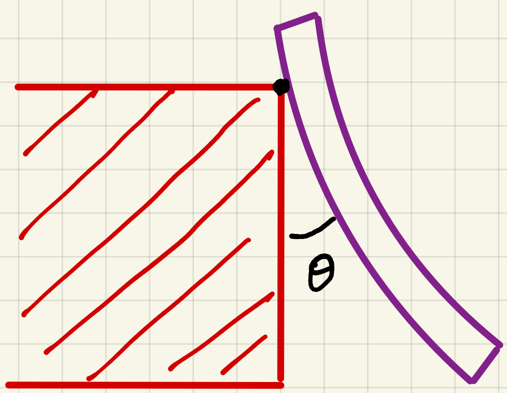
$\delta\zeta = 0$: el borde está fijo.

$\delta \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{n}} = 0$: no cambia de dirección.

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{12(1-\sigma^2)}\nabla^4\zeta - P = 0$$

C.C. $\quad \delta\zeta$ y $\frac{\partial \zeta}{\partial \hat{n}} = 0$ en el contorno.

ii)



Sobre la línea de contacto:

$$\delta\zeta = 0$$

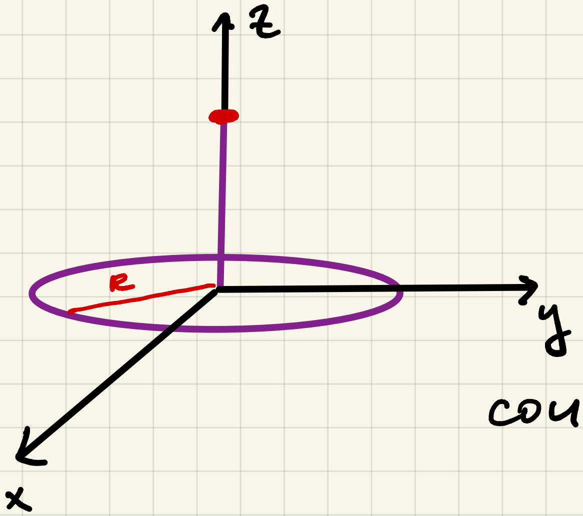
$$\text{y } \delta\frac{\partial \zeta}{\partial \hat{n}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ C.C.:

$$\delta\zeta = 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial l}\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$$

Ejemplo.



$$P = \rho g h \quad [F/A]$$

Tenemos que resolver:

$$\nabla^4 \zeta - 64\beta = 0$$

con $$\beta = \frac{3\rho g(1-\sigma^2)}{16 h^2 E}$$

y por simetría $\zeta = \zeta(r)$, como

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

La solución general

$$\zeta = \beta r^4 + a r^2 + b + c r^2 \ln\frac{r}{R} + d \ln\frac{r}{R}$$

C.F.

Como $\zeta < \infty \ \forall \ r \Rightarrow d = 0$

en $r=0$ no hay desplazamiento

$\Rightarrow b = 0$.

$\therefore \quad \zeta(r) = \beta r^4 + a r^2 + c r^2 \ln \frac{r}{R}$

Las condiciones sobre el contorno:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) = 0$$

y $$\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0$$

De la 1ª

$$32\beta R + \frac{4c}{R} = 0$$

y de la 2ª

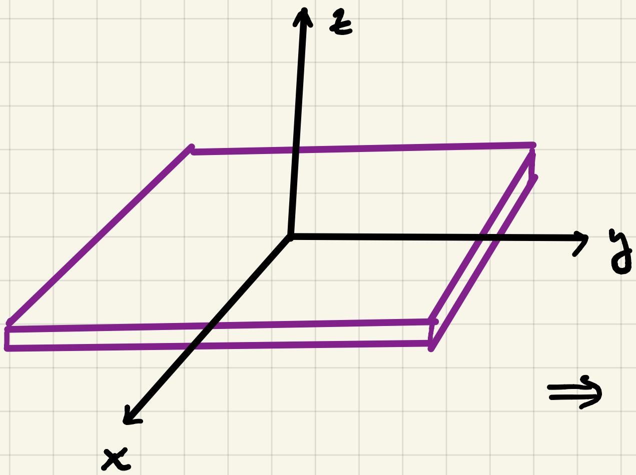
$$4\beta R^2(\sigma+3) + 2a(1+\sigma) + c(\sigma+3) = 0$$

$\therefore$ $$c = -8\beta R$$

y $$a = 2\beta R^2 \frac{(\sigma+3)}{\sigma+1}$$

$\therefore \quad \zeta(r) = \beta r^2\left[r^2 - 8r^2 \ln\frac{R}{r} + 2R^2\frac{3+\sigma}{\sigma+1}\right]$

* Deformaciones longitudinales



Si la placa es delgada $\underset{\sim}{\tau}$ es uniforme en todo el espesor.

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{\tau}(x,y)$$

Causas: Fuerzas superficiales sobre los bordes y/o fuerzas de volumen.

$\tau_{ij} n_i = 0$ sobre las caras

i.e, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$ como la placa es delgada,

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$ en todo el espesor.

de la ley de Hooke

$$\tau_{zx} = \frac{E}{1+\sigma} e_{zx} \; ; \quad \tau_{zy} = \frac{E}{1+\sigma} e_{zy}$$

y $$\tau_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left\{ (1-\sigma) e_{zz} + \sigma (e_{xx} + e_{yy}) \right\}$$

de donde

$$e_{zx} = e_{zy} = 0 \quad \text{y} \quad e_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(e_{xx} + e_{yy})$$

$\therefore$ dados u_x y u_y se puede encontrar u_z: plano elástico.

Las componentes no nulas de $\underset{\sim}{\tau}$

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{xx} + \sigma e_{yy})$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{yy} + \sigma e_{xx})$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\sigma} e_{xy}$$

Nota: Al hacer el cambio

$$E \longrightarrow \frac{E}{1-\sigma^2} \quad \text{y} \quad \sigma \longrightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad \text{con } e_{zz} = 0$$

se obtiene el caso de la deformación plana.

Si P_x y P_y son las fuerzas por unidad de superficie en la dirección de 'x' y 'y' respectivamente

$$\Rightarrow \quad h\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) + P_x = 0$$

$$h\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + P_y = 0$$

Sust. las τ_{ij}'s

$$\Rightarrow$$

$$E h \left\{\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right\} + P_x = 0$$

$$E h \left\{\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\right\} + P_y = 0$$

ó en notación cerrada:

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \frac{1-\sigma}{2}\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = -\vec{P}\,\frac{1-\sigma^2}{E^2}$$

en donde $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

Si no hay fuerzas externas, se puede introducir la función de tensiones $\chi = \chi(x,y) \ni$:

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \; ; \; \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \; \text{ y } \; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

que satisface las ecs. de equilibrio.

Ahora,

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = \nabla^2 \chi$$

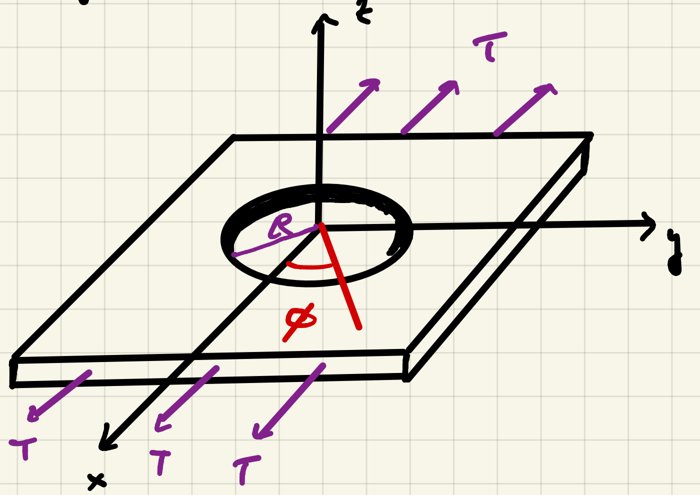
y como $\tau_{xx} + \tau_{yy} = \frac{1}{1-\sigma}(e_{xx} + e_{yy})$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \chi = \frac{1}{1-\sigma} \nabla \cdot \vec{u}$$

$$\therefore \quad \nabla^4 \chi = 0 \quad \text{ya que} \quad \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$$

Notese que en este caso la solución <u>no</u> depende de las prop. elásticas del material.

Ejemplo.



Sin el hueco:

Co Fo.

$$\tau_{xx}^{(0)} = T$$

y $\tau_{ij}^{(0)} = 0 \quad \forall\, i,j \neq 1$

De la ec. de equilibrio: $\nabla^2 \chi^{(0)} = 0$

Sol: $\chi^{(0)} = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy$

Co Fo:

$$\tau_{xx}^{(0)} = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right|_c = T \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} T$$

$$\tau_{xy}^{(0)} = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right|_c = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\tau_{yy}^{(0)} = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right|_c = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$\therefore \quad \chi(\vec{r}) = \frac{1}{2} T y^2$$

Como $y^2 = \frac{1}{2} r^2 (1 - \cos 2\phi)$

$$\Rightarrow \quad \chi^{(0)} = \frac{1}{2} T r^2 (1 - \cos 2\phi)$$

Cuando se considera el hueco:

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}$$

en donde $\nabla^4 \chi^{(1)} = 0$ con las condiciones

$$\tau_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{si} \quad r \to \infty$$

$$\tau_{rr} = \tau_{r\phi} = 0 \quad \text{en} \quad r = R$$

Prop.

$$\chi^{(1)}(r) = f(r) + F(r) \cos 2\phi$$

$$\Rightarrow \nabla^4 f(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = a r^2 \ln r + b r^2 + c \ln r$$

y para el 2º término.

$$\nabla^4 (F(r) \cos 2\phi) = 0$$

$$\Rightarrow F(r) = d r^2 + e r^4 + \frac{g}{r^2}$$

$$\therefore \quad \chi^{(1)} = \frac{1}{2} T R^2 \left\{ -\ln r + \left(1 - \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos 2\phi \right\}$$

$$\therefore \quad \tau_{rr}^{(1)} = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\phi \right\}$$

$$\tau_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\phi \right\}$$

$$\tau_{\phi\phi}^{(1)} \Big|_{r=R} = T \left(1 - 2\cos 2\phi \right)$$

$$y \quad \tau_{r\phi} = -\frac{T}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} \right] \operatorname{sen} 2\phi$$

☆ Torsión de Barras.

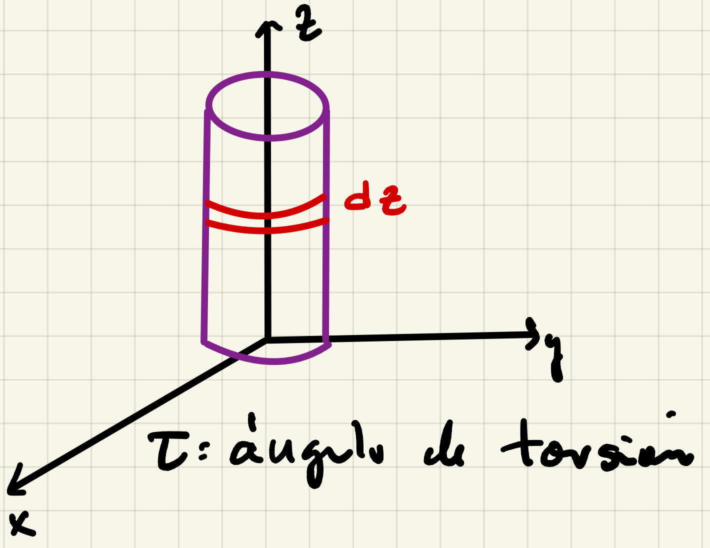
Nota: En estos casos ya que aunque el tensor de deformación es pequeño, el vector de desplazamiento puede ser grande.

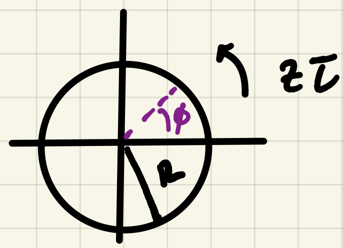
Tenemos dos casos:

i) Torsión
ii) flexión

i) Torsión.

$$\tau = \frac{\phi}{l}$$





$\Rightarrow$ $d\phi = z\,d\tau$ para que sean pequeños desplazamientos $R\tau << 1$

Para segmentos próximos al origen:

$$\vec{u} = \vec{\delta\phi} \times \vec{r}$$ (una rotación en $\vec{\delta\phi}$)

como $\vec{\delta\phi} = \tau z \hat{n}$

$$\Rightarrow \quad u_x = -\tau z y$$

$$u_y = \tau z x$$

Generalmente los ptos. en cada sección sufren un desplazamiento en z.
excepto en $z=0$

$$\Rightarrow \quad u_z = \tau \psi(x,y)$$

$\psi(x,y)$: función de Torsión.

$\therefore$ Las secciones rotan y no permanecen planas, se combean.

El tensor de deformación

$e_{ii} = 0$ si $i=j$, i.e. $e_{ii} = 0$ No hay cambio de vol.

$e_{xy} = 0$; $e_{xz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$; $e_{yz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$

y para el tensor de esfuerzos:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$$

$$\tau_{xz} = 2\mu e_{xz} \Rightarrow \tau_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu e_{yz} \Rightarrow \tau_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$$

Por conveniencia usamos el coef. de rigidez en vez de E y σ.

De la ec. de equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

de donde se encuentra que:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{(Ec. de Laplace)}.$$